Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Federico Bartolozzi

Sopra una classe di piani finiti (R, r)-transitivi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.5, p. 245–248.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_5_245_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Matematica. — *Sopra una classe di piani finiti* (R , r)*-transitivi*. Nota di FEDERICO BARTOLOZZI (*), presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

Recentemente sono state introdotte due classi di piani grafici che risultano (R , r)-transitivi (in relazione ad un loro punto R e ad una loro retta r passante per R) senza essere (R , R)-transitivi né (r , r)-transitivi. La prima di esse Π, definita e studiata da L. A. Rosati [4] (1) e, in maniera del tutto indipendente, da T. G. Ostrom [1] è costituita da piani finiti; l'altra classe Π', dovuta a G. Pannella [2], comprende una sottoclasse di piani finiti.

Nella presente Nota dimostro che ogni piano finito π' di Π' è riferibile, mediante una collineazione, ad un piano π di Π e che i piani di Π che non compaiono in Π' sono esattamente tre (quelli costruiti a partire da quasicorpi associativi eccezionali). Osservo, inoltre, che ogni piano π', finito o no, ammette come dominio di coordinate un sistema cartesiano compreso tra quelli introdotti in [3]; determino, così, un sistema di coordinate per ciascun piano di Π che non sia eccezionale.

Nel n. 2 della Nota espongo i risultati che ho conseguito, dedicando il n. 1 ai richiami necessari per rendere autonoma quell'esposizione.

1. Un piano di Ostrom–Rosati è determinato da un quasicorpo associativo sinistro Q che abbia ordine q^2 e il cui nucleo sia un campo di Galois F di ordine q, risultando Q centrale su F. Il quasicorpo Q, a meno di tre eccezioni ($q = 11, 23, 59$), è individuato dal numero $q = p^h$, se p è un naturale primo dispari e h è un naturale (cfr. [6]). Il piano di Ostrom–Rosati π (Q), costruito usufruendo del quasicorpo associativo Q di ordine maggiore di nove, ha come *punti* le coppie ordinate (x , y) di elementi estratti da Q e le *rette* sono costituite da tutti e soli i suoi punti che verificano un'equazione dei seguenti tipi:

α) $y - p = (x - q)\, t$, ove p e q sono elementi prefissati in F e t è assegnato in $Q - F$;

β) $x = am + c$ e $y = an + d$, i punti della retta ottenendosi al variare di m e n in F, se a, c, d sono elementi prefissati in Q con la condizione $a \neq 0$.

OSSERVAZIONE. – Le rette di tipo α) sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $(Q - F) \times F \times F$ e, quindi, indicheremo una retta α) con il simbolo $[t ; p, q]$. Una medesima retta di tipo β) può, invece, essere otte-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1965.

(1) I numeri in [ ] rinviano alla bibliografia in fine.

nuta usufruendo di elementi distinti di $(Q - 0) \times Q \times Q$; conveniamo, perciò, di indicare con $\{a ; c , d\}$ la classe di elementi di $(Q - 0) \times Q \times Q$ atti a determinare tutti e soli i punti della retta $x = am + c$, $y = an + d$ di tipo β).

Per introdurre i piani di Panella occorre fissare un campo F, finito o no, che verifichi le seguenti condizioni:

(I) F ha caratteristica diversa da due, ha ordine superiore a tre e possiede un elemento s non quadrato (in F);

(II) se $F' = \{z \in F \mid z = x^2 - sy^2 \text{ con } x, y \in F\}$ il prodotto di due elementi di F' che siano non quadrati in F è un quadrato in F;

(III) esistono in F elementi x, y, z, t tali che $(xz - yt)^2 - st^2$ sia un non quadrato in F.

Un piano di Panella $\pi'(F, s)$ si ottiene a partire da tali dati definendo i punti (x_1, x_2, y_1, y_2) dello $S_4(F)$ lineare affine sopra il campo F e introducendo le *rette* come particolari sottoinsiemi di $S_4(F)$ (2).

Più precisamente, posto

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad , \quad A(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} a_1 & sa_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \quad , \quad T(b_1, b_2) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

le rette di $\pi'(F, s)$ sono costituite da tutti e soli i punti di $S_4(F)$ che con le loro coordinate verificano equazioni dei seguenti tipi:

α') $Y = A(a_1, a_2)X + T(b_1, b_2)$ se $(a_2 x_1 + b_2)^2 - s(a_2 x_2)^2$ è zero o è quadrato in F e $Y = A(a_1, -a_2)X + T(b_1, -b_2)$ se $(a_2 x_1 + b_2)^2 - s(a_2 x_2)^2$ è non quadrato in F, ove a_1, a_2, b_1, b_2 sono elementi prefissati in F e $a_2 \neq 0$. Indicheremo la retta or ora definita con la scrittura $[a_1, a_2 ; b_1, b_2]'$;

β') $x_2 - a_1 x_1 - b_1 = y_2 - a_1 y_1 - b_2 = 0$, oppure $x_1 - b_1 = y_1 - b_2 = 0$ essendo a_1, b_1, b_2 elementi di F comunque scelti. Tali rette di $\pi'(F, s)$ sono identificabili con piani (particolari) di $S_4(F)$; le indicheremo, rispettivamente, con le scritture $\{a_1 ; b_1, b_2\}'$ e $\{\infty ; b_1, b_2\}'$.

2. Conservando le notazioni del n. 1, sia Q un quasicorpo associativo finito *non eccezionale* di ordine q^2 avente come nucleo (e centro) il campo di Galois F di ordine (dispari) q. Risulta individuato il piano $\pi'(F, s)$, non appena si fissi un elemento s di F che non sia un quadrato in F (3). Vale il

TEOREMA I. – *Esiste una collineazione del piano* $\pi(Q)$ *sopra il piano* $\pi'(F, s)$.

Dimostrazione. – Sia K il campo di scomposizione su F del polinomio $x^2 - s$; risulta $K = \{x = x_1 + x_2 \xi \mid x_1, x_2 \in F \text{ e } \xi^2 = s\}$. Se σ è l'automorfismo di K che fissa F elemento per elemento è $x^\sigma = x_1 - x_2 \xi$ per ogni $x \in K$. Sull'insieme sostegno del campo $K(+, \cdot)$ definiamo un'operazione binaria, $\circ$, ponendo $x \circ y = xy$ se xx^σ è zero o è un quadrato in F e $x \circ y = xy^\sigma$

(2) Per la terminologia relativa agli spazi lineari e ai piani grafici si rimanda al trattato [5].

(3) Sotto le condizioni attuali, infatti, le (I), (II), (III) del n. 1 risultano automaticamente soddisfatte.

se xx^σ è un non quadrato in F. Si verifica facilmente che K $(+ , \circ)$ è un quasicorpo associativo non eccezionale di ordine q^2 avente nucleo F; quindi [6], K $(+ , \circ)$ è isomorfo a Q. Ogni elemento t di K $(+ , \circ)$ si potrà scrivere $t = t_1 + t_2\,\xi$, pensando t come vettore su F. Ciò premesso, sia P (P′) l'insieme dei punti di π (Q) (di π' (F , s)) e R (R′) l'insieme delle sue rette. Si considerino le applicazioni

$$\varphi : \quad P \longrightarrow P'$$

$$\psi : \quad R \longrightarrow R'$$

definite ponendo $\varphi(x , y) = (x_1 , x_2 , y_1 , y_2)$ se $(x , y) \in P$ $(x = x_1 + x_2\,\xi$, $y = y_1 + y_2\,\xi)$ e $\psi(r) = r'$ per ogni $r \in R$, ove r' è individuata come segue:

1) se $r = [t ; p , q]$ è retta di π (Q) di tipo α), posto $t = t_1 + t_2\,\xi$, $p = p_1 + 0\,\xi$, $q = q_1 + 0\,\xi$ risulta $r' = [t_1 , t_2 ; p_1 - q_1 t_1 , - q_1 t_2]'$;

2) se $r = \{ a ; c , d \}$ è retta di π (Q) di tipo β), posto $a = a_1 + a_2\,\xi$, $c = c_1 + c_2\,\xi$, $d = d_1 + d_2\,\xi$ risulta $r' = \{ a_1^{-1} a_2 ; c_2 - c_1\, a_1^{-1} a_2 , d_2 - d_1\, a_1^{-1} a_2 \}'$ quando $a_1 \neq 0$ e $r' = \{ \infty ; c_1 , d_1 \}'$ quando $a_1 = 0$.

Si verifica agevolmente che le applicazioni φ e ψ sono corrispondenze biunivoche e che il punto (x , y) di π (Q) appartiene alle retta r di quel piano se, e solo se, $\varphi(x , y)$ è elemento di $\psi(r)$ in π'(F , s). Il teorema è, così, dimostrato.

Le argomentazioni svolte nella dimostrazione del teorema I permettono di enunciare il seguente

COROLLARIO. – *I piani finiti* π' (F , s) *e* π' (F′ , s') *sono isomorfi se, e solo se, il campo* F *è isomorfo al campo* F′. *Al variare di* F *nell'insieme dei campi di Galois di caratteristica diversa da due e di ordine superiore a tre si ottiene un insieme di piani* $\{ \pi'(F , s) \}$ *che è compreso nell'insieme dei piani costruiti da* Ostrom *e* Rosati *e che differisce da quello solamente per tre elementi* (*i tre piani di* Ostrom–Rosati *relativi a quasicorpi eccezionali*).

Vogliamo, ancora, determinare un sistema cartesiano (proprio) che risulti dominio di coordinate per un piano π (Q), nell'ipotesi che il quasicorpo associativo Q non sia eccezionale. A tal fine è sufficiente, in virtù del teorema I, determinare un sistema cartesiano (proprio) che risulti dominio di coordinate per un piano finito π' (F , s). Proveremo, perciò, che ogni piano π ′(F , s), finito o no, è coordinatizzabile mediante il sistema cartesiano (proprio) J (F , s) $(+ , \circ)$ definito da G. Panella in [3]. All'uopo stabiliamo il seguente

TEOREMA II. – *Il piano* π'(F , s) *ammette come dominio di coordinate un sistema cartesiano* (*proprio*) *che è isomorfo al sistema cartesiano* J (F , s) $(+ , \circ)$.

Dimostrazione. – La prova del teorema è diretta, nel senso che si ottiene fissando un riferimento opportuno in π' (F , s) e determinando, con calcoli laboriosi ma non difficili, l'anello ternario associato a quel riferimento quando si operi, in relazione ad esso, con la ben nota operazione ternaria di Marshall Hall (cfr., ad esempio [5]). Per stabilire il risultato basta assumere come modello del piano π' (F , s) quello definito al n. 1 e assumere il riferimento che ha origine in (0 , 0 , 0 , 0), punto unità in (1 , 1 , 0 , 0) e che ha come assi x e y le rette $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 0$ rispettivamente.

BIBLIOGRAFIA.

[1] OSTROM T. G., *Finite planes with a single* (P, *l*)*-transitivity*, « Arch. Math. », *15*, 378–384 (1964).

[2] PANELLA G., *Osservazioni sulla costruzione dei piani di Hughes*, « Rend. Mat. e Appl. », *23*, 331–350, (1964).

[3] PANELLA G., *Una classe di sistemi cartesiani*, « Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis., mat. e nat. », VIII, *38*, 480–485 (1965).

[4] ROSATI L. A., *Su una nuova classe di piani grafici*, « Ricerche Mat. », *13*, 39–55 (1964).

[5] SEGRE B., *Lectures on Modern Geometry* (con appendice di L. Lombardo-Radice), Roma, Cremonese (1961).

[6] ZASSENHAUSS H., *Über endliche Fastkörper*, « Abh. Mat. Seminar Univ. Hamburg », *11*, 187–220 (1936).

Per una esposizione riassuntiva di alcuni dei risultati contenuti in [1], [2], [3], [4] e per il significato geometrico della costruzione di L. A. Rosati–T. G. Ostrom, vedi anche:

[7] LOMBARDO-RADICE L., *Recenti risultati nella teoria dei piani grafici*, « Rend. Sem. Matem. Univ. Polit. Torino », *24*, 5–16 (1964–65).

SUMMARY. — In the present paper it is proved that the finite planes with a single (R , r)-transitivity introduced by T. G. Ostrom and L. A. Rosati (1964) are isomorphic to the finite ones in the class of (R , r)-transitive planes constructed by G. Panella (1964). It is also shown that such planes are coordinatized by the proper finite cartesian systems introduced by G. Panella (1965).