Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Prouse

Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione non omogenea delle onde, con termine dissipativo non lineare. Nota IV

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.5, p. 240–244.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_5_240_0>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione non omogenea delle onde, con termine dissipativo non lineare.* Nota IV di GIOVANNI PROUSE, presentata [*] dal Corrisp. L. AMERIO.

4. Dimostriamo i teoremi 7, 8, 9.

Dimostrazione del teorema 7.

Perché il teorema sia provato, basterà far vedere, per il criterio di Bochner, che, detta $\{l_n\}$ una qualsiasi successione reale, è possibile estrarre da essa una sottosuccessione (che diremo ancora $\{l_n\}$) tale che risulti

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*}\ \vec{u}\,(t+l_n) \underset{L_0^2(E)}{=} z\,(t) \quad [1] \tag{4.1}$$

uniformemente in J.

Osserviamo che potremo senz'altro ammettere che $\{l_n\}$ sia regolare rispetto a $f\,(t)$, ossia che risulti, uniformemente in J,

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*}\ f\,(t+l_n) \underset{L_0^2}{=} g\,(t)\,; \tag{4.2}$$

inoltre, per le ipotesi fatte, $g\,(t)$ risulta L_0^2-d.q.p. e $g'(t)$ è L_0^2-limitata in J.

Posto $u_n\,(\eta) = \vec{u}\,(\eta + l_n)$, possiamo d'altra parte ripetere i ragionamenti fatti per dimostrare il teorema 5 e provare che dalla successione $\{u_n(\eta)\}$ può estrarsi una sottosuccessione (che diremo ancora $\{u_n(\eta)\}$) convergente, nella topologia definita dalle (3.20), (3.21), verso una funzione $z\,(\eta)$, soluzione E-limitata in J della (1.1) corrispondente al termine noto $g\,(\eta)$. In particolare la (4.1) vale per ogni $t \in$ J.

Dimostriamo che la (4.1) sussiste uniformemente in J; otterremo ciò con un ragionamento di tipo noto (cfr. Favard [7], Amerio [6]).

Supponiamo, per assurda ipotesi, che tale uniformità non sussista; esistono allora un elemento $\varphi \in L_0^2\,(E)$, un numero $\chi > 0$ e tre successioni $\{t_n\}, \{\alpha'_n\} \subseteq \{l_n\}, \{\alpha''_n\} \subseteq \{l_n\}$ tali che risulti

$$\left| (\vec{u}\,(t_n + \alpha'_n) - \vec{u}\,(t_n + \alpha''_n)\,,\,\varphi)_{L_0^2(E)} \right| \geq \chi\,. \tag{4.3}$$

Per quanto si è detto sopra, possiamo estrarre da $\{t_n + \alpha'_n\}$ e $\{t_n + \alpha''_n\}$ due sottosuccessioni (che indicheremo con le medesime notazioni) per le quali

(*) Nella seduta dell'8 maggio 1965.

(1) Cioè

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Delta} (\vec{u}\,(t+\eta+l_n) - z\,(t+\eta)\,,\,h\,(\eta))_E\, d\eta = 0 \qquad \forall h\,(\eta) \in L_0^2\,(E)\,.$$

si riconosce che è, uniformemente in J,

$$(4.4)\qquad \lim_{n\to\infty}{}^{*} f(t + t_n + \alpha'_n) = \lim_{n\to\infty}{}^{*} f(t + t_n + \alpha''_n) \underset{L_0^2}{=} g(t)\,.$$

Si ha inoltre, per ogni $t \in J$,

$$(4.5)\qquad \lim_{n\to\infty}{}^{*} \tilde{u}(t + t_n + \alpha'_n) \underset{L_0^2(E)}{=} z_1(t)\,,$$

$$(4.6)\qquad \lim_{n\to\infty}{}^{*} \tilde{u}(t + t_n + \alpha''_n) \underset{L_0^2(E)}{=} z_2(t)\,,$$

essendo $z_1(t)$ e $z_2(t)$ due soluzioni E-limitate in J della (1.1) corrispondenti al termine noto $g(\eta)$. Per il teorema 4 risulta perciò $z_1(\eta) = z_2(\eta)$ e la (4.3) è quindi assurda.

È dunque dimostrato che la (4.1) sussiste uniformemente in J.

Dimostrazione del teorema 8.

Proviamo anzitutto che $\tilde{u}(t)$ è $L_0^2(E)$-q.p., utilizzando il seguente criterio di quasi-periodicità dedotto da uno di Amerio [8] (cfr. [9]).

Sia $u(t)$ una funzione d.q.p. a valori in uno spazio H uniformemente convesso. Supponiamo che per ogni successione $\{l_n\}$ tale che risulti

$$(4.7)\qquad \|u(l_j) - u(l_k)\|_H \geq \sigma > 0 \qquad (j \neq k),$$

(ove σ dipende da $\{l_j\}$), risulti anche, per ogni $t < 0$,

$$(4.8)\qquad \max \lim_{j,k\to\infty} \|u(t + l_j) - u(t + l_k)\|_H \geq \tau_\sigma > 0,$$

essendo τ_σ indipendente da t. Allora $u(t)$ è H-q.p.

Posto $w_{jk}(\eta) = \tilde{u}(\eta + l_j) - \tilde{u}(\eta + l_k)$ si ottiene, in modo analogo alla (3.34)

$$(4.9)\quad \|w_{jk}(t+\eta)\|_E^2 \geq \|w_{jk}(\eta)\|_E^2 - 2\int_{t+\eta}^{\eta} |(f(\xi+l_j) - f(\xi+l_k), w'_{jk}(\xi))_{L^2}|\,d\xi \quad (t<0),$$

da cui si deduce, integrando rispetto a η fra 0 e 1,

$$(4.10)\quad \|w_{jk}(t)\|_{L_0^2(E)}^2 \geq \|w_{jk}(0)\|_{L_0^2(E)}^2 - 2\int_0^1 d\eta \int_{t+\eta}^{\eta} |(f(\xi+l_j) - f(\xi+l_k), w'_{jk}(\xi))_{L^2}|\,d\xi \geq$$

$$\geq \|w_{jk}(0)\|_{L_0^2(E)}^2 - 2|t| \left\{\int_t^1 \|f(\xi+l_j) - f(\xi+l_k)\|_{L^2}^2 d\xi\right\}^{1/2} \left\{\int_t^1 \|w'_{jk}(\xi)\|_{L^2}^2 d\xi\right\}^{1/2}.$$

Supponiamo ora che, per la successione considerata, si abbia

$$(4.11)\qquad \|\tilde{u}(l_j) - \tilde{u}(l_k)\|_{L_0^2(E)} = \|w_{jk}(0)\|_{L_0^2(E)} \geq \sigma > 0 \qquad (j \neq k);$$

poiché, per le ipotesi fatte, l'ultimo termine della (4.10) è, per ogni fissato t, infinitesimo per $j, k \to \infty$, dalle (4.10), (4.11) si deduce, per ogni fissato $t < 0$,

$$\max_{j,k\to\infty} \lim \| \tilde{u}(t + l_j) - \tilde{u}(t + l_k) \|_{L_0^2(E)} = \max_{j,k\to\infty} \lim \| w_{jk}(t) \|_{L_0^2(E)} \geq \sigma . \tag{4.12}$$

La funzione $\tilde{u}(t)$ è quindi $L_0^2(E)$–q.p.

Dimostriamo ora che $\tilde{u}(\eta)$ risulta E–q.p. Basterà, per questo, far vedere che da ogni successione reale $\{l_n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione (che diremo ancora $\{l_n\}$) tale che risulti, uniformemente in J,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{u}(\eta + l_n) \underset{E}{=} z(\eta) . \tag{4.13}$$

Supponiamo per assurda ipotesi, che la (4.13) non sussista uniformemente in J. Esisterà allora una successione $\{\bar{l}_n\}$ tale che in corrispondenza di ogni sua sottosuccessione $\{l'_n\}$ esistono due sottosuccessioni $\{\alpha'_n\} \subseteq \{l'_n\}$, $\{\alpha''_n\} \subseteq \{l'_n\}$, una successione $\{t_n\}$ ed un numero $\sigma > 0$ per cui risulti

$$\| \tilde{u}(t_n + \alpha'_n) - \tilde{u}(t_n + \alpha''_n) \|_E \geq \sigma . \tag{4.14}$$

Potremo ovviamente ammettere che $\{\bar{l}_n\}$ sia regolare rispetto a $f(t)$ ed a $\tilde{u}(t)$, ossia che risulti

$$\lim_{n\to\infty} f(t + \bar{l}_n) \underset{L_0^2}{=} g(t) , \tag{4.15}$$

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{u}(t + \bar{l}_n) \underset{L_0^2(E)}{=} z(t) , \tag{4.16}$$

uniformemente in J.

Consideriamo la funzione $w_n(\eta) = \tilde{u}(\eta + t_n + \alpha'_n) - \tilde{u}(\eta + t_n + \alpha''_n)$; per essa vale la relazione, analoga alla (4.9).

$$\| w_n(\eta) \|_E^2 \geq \| w_n(0) \|_E^2 - 2 \left\{ \int_\eta^0 \| f(\xi + t_n + \alpha'_n) - f(\xi + t_n + \alpha''_n) \|_{L^2}^2 \, d\xi \right\}^{1/2} \cdot \tag{4.17}$$

$$\cdot \left\{ \int_\eta^0 \| w'_n(\xi) \|_{L^2}^2 \, d\xi \right\}^{1/2} \qquad (\eta \leq 0) .$$

Per le ipotesi fatte, è possibile assumere $n \geq n_\sigma$ tanto grande che risulti, per $-1 \leq \eta \leq 0$,

$$2 \left\{ \int_\eta^0 \| f(\xi + t_n + \alpha'_n) - f(\xi + t_n + \alpha''_n) \|_{L^2}^2 \, d\xi \right\}^{1/2} \left\{ \int_\eta^0 \| w'_n(\xi) \|_{L^2}^2 \, d\xi \right\}^{1/2} \leq \tag{4.18}$$

$$\leq 2 \| f(-1 + t_n + \alpha'_n) - f(-1 + t_n + \alpha''_n) \|_{L_0^2} \| w'_n(-1) \|_{L_0^2} \leq \frac{\sigma^2}{2} .$$

Dalle (4.14), (4.17), (4.18) si deduce allora

$$\| w_n(\eta) \|_E^2 \geq \frac{\sigma^2}{2} \qquad (n \geq n_\sigma ; -1 \leq \eta \leq 0) . \tag{4.19}$$

Integrando la (4.19) fra —1 e 0 si ottiene

$$\| w_n(-1) \|^2_{L_0^2(E)} \geq \frac{\sigma^2}{2}, \tag{4.20}$$

ciò che è assurdo, essendo $\tilde{\tilde{u}}(t)\ L_0^2(E)$–*q.p.*

La (4.13) sussiste perciò uniformemente in J e la funzione $\tilde{\tilde{u}}(\eta)$ è E–q.p.

Dimostrazione del teorema 9.

Per provare il teorema, basterà far vedere che la (4.13) sussiste uniformemente in J; potremo d'altra parte ammettere che risulti, uniformemente in J,

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} f(t+l_n) \underset{L_0^2}{=} g(t). \tag{4.21}$$

Poiché inoltre, per il teorema 6, $\tilde{\tilde{u}}(\eta)$ ha la traiettoria E–relativamente compatta ed è E–uniformemente continua in J, si può supporre che sia, per il teorema (vettoriale) di Ascoli–Arzelà,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\tilde{u}}(\eta+l_n) \underset{E}{=} z(\eta), \tag{4.22}$$

uniformemente in ogni intervallo limitato.

Dimostriamo che la (4.22) sussiste uniformemente in J, seguendo il procedimento già utilizzato nella dimostrazione del teorema 7.

Supponiamo, per assurdo, che la (4.22) non valga uniformemente in J; esistono allora un numero $\sigma > 0$ e tre successioni $\{\eta_n\}, \{\alpha'_n\} \subseteq \{l_n\}, \{\alpha''_n\} \subseteq \{l_n\}$ tali che risulti

$$\| \tilde{\tilde{u}}(\eta_n+\alpha'_n) - \tilde{\tilde{u}}(\eta_n+\alpha''_n) \|_E \geq \sigma. \tag{4.23}$$

Possiamo d'altra parte estrarre da $\{\eta_n+\alpha'_n\}$ e $\{\eta_n+\alpha''_n\}$ due sottosuccessioni (che indicheremo con le medesime notazioni) per le quali si riconosce che è, uniformemente in J,

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} f(t+\eta_n+\alpha'_n) = \lim_{n\to\infty}{}^{*} f(t+\eta_n+\alpha''_n) \underset{L_0^2}{=} g(t). \tag{4.24}$$

Si ha inoltre, per ogni $t \in J$ e per ogni $h_1 \in L_0^1(E)$,

$$\left\{\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_\Delta (\tilde{\tilde{u}}(t+\eta+\eta_n+\alpha'_n) - z_1(t+\eta), h_1(\eta))_E\, d\eta = 0, \\
&\lim_{n\to\infty} \int_\Delta (\tilde{\tilde{u}}'(t+\eta+\eta_n+\alpha'_n) - z'_1(t+\eta), h_1(\eta))_E\, d\eta = 0, \\
&\lim_{n\to\infty} \int_\Delta (\tilde{\tilde{u}}(t+\eta+\eta_n+\alpha''_n) - z_2(t+\eta), h_1(\eta))_E\, d\eta = 0, \\
&\lim_{n\to\infty} \int_\Delta (\tilde{\tilde{u}}'(t+\eta+\eta_n+\alpha''_n) - z'_2(t+\eta), h_1(\eta))_E\, d\eta = 0,
\end{aligned}\right. \tag{4.25}$$

essendo $z_1(\eta)$, $z_2(\eta)$ due soluzioni E–limitate in J della (1.1) corrispondenti al termine noto $g(\eta)$.

Risulta perciò $z_1(\eta) = z_2(\eta)$.

Si deduce poi, in modo analogo alla (4.22)

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{u}(\eta + \eta_n + \alpha'_n) \underset{\mathrm{E}}{=} z_1(\eta) = z_2(\eta) \underset{\mathrm{E}}{=} \lim_{n\to\infty} \tilde{u}(\eta + \eta_n + \alpha''_n)\,. \tag{4.26}$$

La (4.26), scritta per $\eta = 0$, contraddice alla (4.23); il limite (4.22) sussiste perciò uniformemente in J ed il teorema è dimostrato.

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. PROUSE, *Soluzioni quasi–periodiche dell'equazione non omogenea della membrana vibrante, con termini e dissipativo quadratico*. Note I e II, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *37* (1964).

[2] J. L. LIONS e W. A. STRAUSS, *Some non–linear evo lution equations*. In corso di stampa su « Bull. Soc. Math. Fr. » (1964).

[3] J. L. LIONS e W. A. STRAUSS, *Sur certains problèmes hyperboliques non linéaires*, « C.R. Acad. Sc. Paris », *257* (1963).

[4] G. PROUSE, *Soluzioni periodiche dell'equazione delle onde non omogenea con termine dissipativo quadratico*, « Ric. di Mat. », *13* (1964).

[5] G. PROUSE, *Soluzioni limitate dell'equazione delle onde non omogenea con termine dissipativo quadratico*. In corso di stampa su « Ric. di Mat. » (1965).

[6] L. AMERIO, *Solutions presque–périodiques d'équations fonctionnelles dans les espaces de Hilbert*. Colloque de Liège sur l'Analyse fonctionnelle (1964).

[7] J. FAVARD, *Leçons sur les fonctions presque–périodiques*, Gauthier–Villars (1933).

[8] L. AMERIO, *Sulle equazioni lineari quasi–periodiche negli spazi hilbertiani*. Note I, II, III, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *31* (1961).

[9) G. PROUSE, *Soluzioni quasi–periodiche delle equazioni lineari di tipo parabolico*, « Rend. Ist. Lomb. Sc. Lett. », *96* (1962).

SUMMARY. — Object of these notes is the study of almost-periodic solutions of the non homogeneous wave equation with non linear dissipative term. Some general results regarding bounded solution are given ant it is proved that under convenient assumption on the non linear term and the number of dimensions, there exists one, and only one a.p. solution, to which all other solutions asymptotically converge.