Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cataldo Agostinelli

Esistenza di traiettorie periodiche cuspidate nel moto relativo di un satellite artificiale intorno alla Terra e alla Luna

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.5, p. 224–231.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_5_224_0>

Meccanica celeste. — *Esistenza di traiettorie periodiche cuspidate nel moto relativo di un satellite artificiale intorno alla Terra e alla Luna.* Nota (*) del Corrisp. CATALDO AGOSTINELLI.

1. Il problema ristretto dei tre corpi ha avuto, com'è noto, un posto preminente nelle ricerche di Meccanica celeste, specialmente per opera di Poincaré. Esso è un caso particolare del problema del moto di tre corpi puntiformi che si attraggono mutuamente con la legge di Newton, e si presenta quando una delle masse è infinitamente piccola in confronto delle altre due, tale da non influire sul movimento di queste ultime. Questo problema assume attualmente un'importanza tutta particolare per lo studio del moto di un satellite artificiale lanciato verso la Luna sotto l'azione gravitazionale terrestre e lunare.

Ora, se si ammette che il moto relativo della Luna intorno alla Terra sia circolare uniforme, come si può ritenere con sufficiente approssimazione, e che il satellite artificiale si muova nel piano dell'orbita lunare, in base ad un'analisi effettuata da G. Darwin nel caso speciale del problema ristretto dei tre corpi, si ha che esistono delle *curve critiche*, dette *curve di velocità nulla*, che limitano i campi in cui può avvenire il movimento del satellite, le cui equazioni si ottengono annullando la velocità del satellite nell'integrale dell'energia. Al variare della costante C di questo integrale varia la forma di queste curve. Per valori molto grandi di detta costante una curva di velocità nulla consta di tre rami chiusi, cioè di tre ovali, due delle quali α, β, si avvolgono rispettivamente intorno ai corpi principali P_0 (Terra) e P_1 (Luna), mentre la terza γ abbraccia le prime due. Il moto del satellite può allora avvenire entro le ovali α, β, oppure all'esterno dell'ovale γ.

Col decrescere della costante C i due rami α, β si ingrandiscono e per un certo valore C_0 di C essi si uniscono in un punto L_1 della congiungente Terra–Luna, detto *centro di librazione*, formando una specie di Lemniscata.

In questa Nota mi sono proposto di dimostrare che, quando la costante dell'energia raggiunge il valore C_0, vi sono dei moti del satellite artificiale intorno alla Terra P_0, oppure intorno alla Luna P_1, in cui il centro di librazione L_1 è un punto a meta asintotica, che viene cioè raggiunto, con velocità nulla, dopo un tempo infinito. Ma prima di questo ho dimostrato che esistono dei movimenti in cui il satellite passa dal campo α al campo β, attraverso il centro di librazione L_1, con velocità non nulla, e che la traiettoria, che abbraccia i due corpi P_0 e P_1, forma in quel punto una cuspide. Più precisamente nell'andato da P_0 verso P_1 la traiettoria, nell'intorno del punto L_1, è tutta situata da una parte della congiungente $P_0 P_1$ ed è tangente a questa retta

(*) Presentata nell'adunanza del 13 novembre 1965.

nel punto L_1. Nel ritorno il satellite tocca la stessa retta nel punto L_1, dalla parte opposta, e con la stessa velocità (cambiata di segno), con cui vi è passato nell'andata.

2. Essendo P_0 e P_1 i due corpi principali, rispettivamente di massa m_0 ed m_1, e P il terzo corpo di massa trascurabile in confronto delle precedenti, nell'ipotesi che essi si attraggano mutuamente con la legge di Newton, dette r ed r_1 le distanze di P da P_0 e P_1, ed R la distanza $\overline{P_0 P_1}$, le equazioni del moto relativo di P e di P_1, rispetto a P_0, risultano [1]

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2(P-P_0)}{dt^2} = -fm_0\dfrac{P-P_0}{r^3} - fm_1\left(\dfrac{P-P_1}{r_1^3} + \dfrac{P_1-P_0}{R^3}\right) \\[2ex] \dfrac{d^2(P_1-P_0)}{dt^2} + f(m_0+m_1)\cdot\dfrac{P_1-P_0}{R^3} = 0\,, \end{cases}$$

dove f è la costante di attrazione universale.

La seconda delle (1) mostra che è compatibile un moto circolare uniforme di P_1 intorno a P_0, alla distanza R costante, con velocità angolare n definita dalla relazione

$$(2)\qquad n^2 = f(m_0+m_1)/R^3.$$

Supposto poi che P si muova nel piano in cui si muove P_1, con riferimento ad una coppia di assi ortogonali (xy) con l'origine in P_0, l'asse x coincidente con la retta $P_0 P_1$, e uniformemente rotante intorno a P_0 con velocità angolare n, dette x, y le coordinate di P secondo questi assi, le equazioni cartesiane del moto di P risultano

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2n\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2n\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial y}\,, \end{cases}$$

dove è

$$(4)\qquad \Omega = f\left(\frac{m_0}{r} + \frac{m_1}{r_1}\right) + \frac{1}{2}\frac{f}{R^3}(m_0 r^2 + m_1 r_1^2)\,,$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad r_1 = \sqrt{(x-R)^2+y^2}\,.$$

Queste equazioni ammettono il cosidetto integrale di Jacobi

$$(5)\qquad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = \Omega - \frac{1}{2}C\,,$$

con C costante arbitraria, il quale non è altro che l'integrale dell'energia.

Dall'integrale (5) si deduce che la velocità del corpo P è *stazionaria* nei punti per cui $\partial\Omega/\partial x = 0$, $\partial\Omega/\partial y = 0$.

(1) Cfr. C. AGOSTINELLI, *Sul problema dei tre corpi*, « Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano », vol. XXI (1950).

Ora si ha

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial x} = -f\left(\dfrac{m_0\,x}{r^3} + \dfrac{m_1\,(x-\mathrm{R})}{r_1^3}\right) + \dfrac{f}{\mathrm{R}^3}\,[(m_0+m_1)\,x - m_1\,\mathrm{R}] \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial y} = -f\left(\dfrac{m_0}{r^3} + \dfrac{m_1}{r_1^3}\right) y + \dfrac{f}{\mathrm{R}^3}\,(m_0+m_1)\,y\,. \end{cases}$$

Uguagliando a zero i secondi membri delle (6), si ottengono cinque coppie di valori per $x\,,y$, cioè cinque *punti critici* del piano, detti anche *centri di librazione*, in corrispondenza dei quali si annullano simultaneamente le due derivate parziali di Ω. Tre di questi punti $L_1\,,L_2\,,L_3$, giacciono sull'asse x, il primo compreso fra P_0 e P_1, e gli altri esternamente al segmento $\overline{P_0\,P_1}$. Gli ultimi due punti $L_4\,,L_5$, formano con P_0 e P_1 due triangoli equilateri.

Questi cinque punti corrispondono rispettivamente alle soluzioni stazionarie del problema dei tre corpi, cioè quelle di Eulero dei tre corpi allineati e quelle di Lagrange in cui i tre corpi sono ai vertici di un triangolo equilatero.

Qui fisseremo la nostra attenzione sul punto di librazione L_1 compreso fra P_0 e P_1, per cui è $y = 0\,,0 < x < \mathrm{R}$. In questo punto avremo allora

$$(7)\qquad -f\left(\frac{m_0}{x^2} - \frac{m_1}{(\mathrm{R}-x)^2}\right) + \frac{f}{\mathrm{R}^3}\,[(m_0+m_1)\,x - m_1\,\mathrm{R}] = 0\,.$$

Riducendo a forma intera, ricordando la (2) e ponendo ancora

$$(8)\qquad n_1^2 = f m_1/\mathrm{R}^3 \quad , \quad \mu = n_1^2/n^2 = m_1/(m_0+m_1) = \frac{m_1}{m_0}\Big/\left(1+\frac{m_1}{m_0}\right),$$
$$\mathrm{X} = x/\mathrm{R} \quad , \quad \mathrm{Y} = y/\mathrm{R}\,,$$

si ha l'equazione di 5° grado in X:

$$(9)\qquad \mathrm{X}^5 - (2+\mu)\,\mathrm{X}^4 + (1+2\,\mu)\,\mathrm{X}^3 - (1-\mu)\,(\mathrm{X}^2 - 2\,x + 1) = 0\,,$$

che si può scrivere anche

$$(9')\qquad (\mathrm{X}-1)^3\,(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1) - \mu\,(\mathrm{X}^4 - 2\,\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + 2\,\mathrm{X} - 1) = 0, \quad (0 < \mathrm{X} < 1).$$

Osserviamo che nel caso del sistema Terra–Luna è $m_1/m_0 \approx 1/81{,}3$, e quindi $\mu \approx 1/82{,}3$. Si riconosce allora che l'equazione (9) ammette una radice reale, che indicheremo con X_0, compresa fra 0 e 1.

Poiché il rapporto μ è molto piccolo in confronto dell'unità, si può pensare la X_0 esprimibile in serie di potenze di μ. Dalla (9′) si ha che per $\mu = 0$, l'unica radice reale (tripla), è $\mathrm{X}_0 = 1$; ne segue che $(\mathrm{X}_0 - 1)^3$ deve essere divisibile per μ, e quindi $\mathrm{X}_0 - 1$ sarà divisibile per $\sqrt[3]{\mu}$. Posto allora $\sqrt[3]{\mu/3} = \varepsilon$, cioè $\mu = 3\,\varepsilon^3$, la soluzione X_0 che si cerca, sviluppata in serie di potenze intere di ε, sarà della forma

$$\mathrm{X}_0 = 1 + \mathrm{A}_1\,\varepsilon + \mathrm{A}_2\,\varepsilon^2 + \mathrm{A}_3\,\varepsilon^3 + \mathrm{A}_4\,\varepsilon^4 + \cdots$$

Calcolando i coefficienti $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots$ con noti procedimenti, si trova

$$A_1 = -1 \quad , \quad A_2 = \frac{1}{3} \quad , \quad A_3 = \frac{1}{9} \quad , \quad A_4 = -\frac{58}{81}, \ldots$$

e quindi

$$X_0 = 1 - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{2/3} + \frac{1}{9}\cdot\frac{\mu}{3} - \frac{58}{81}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{4/3} + \cdots \tag{10}$$

È opportuno ricordare ancora che nel problema in questione si presenta di grande interesse la considerazione delle *curve di velocità nulla*, o *curve critiche*, che in base all'integrale (5) sono definite dall'equazione

$$\Omega - \frac{1}{2} C = 0 . \tag{11}$$

Esse sono state molto accuratamente studiate da Darwin [2] e la loro considerazione si rende particolarmente utile per vedere come, al variare della costante C di Jacobi, sono distribuite le orbite del satellite P, e in alcuni casi per decidere anche della stabilità del moto di esso.

In base alla (5), per un dato valore della costante C il moto è possibile nelle regioni del piano (xy) dove è $\Omega - C/2 \geq 0$.

Fra le curve di velocità nulla ha particolare interesse, nel problema in esame, quella che, abbracciando a forma di Lemniscata i due corpi P_0, P_1, passa per il punto di librazione L_1, situato fra P_0 e P_1, ed ha ivi un nodo.

Poiché nel punto L_1, è $y = 0$, $r = x = RX_0$, $r_1 = R(1 - X_0)$, e quindi

$$\Omega = f\left[\frac{m_0}{RX_0} + \frac{m_1}{R(1 - X_0)}\right] + \frac{1}{2}\frac{f}{R^3}\left[m_0 R^2 X_0^2 + m_1 R^2 (1 - X_0)^2\right]$$

la (11) porge, per la costante C corrispondente alla curva di velocità nulla considerata, il valore C_0 dato da

$$\frac{1}{2} C_0 = n^2 R^2 \left\{ \frac{1-\mu}{X_0} + \frac{\mu}{1 - X_0} + \frac{1}{2}\left[X_0^2 + \mu(1 - 2X_0)\right] \right\}, \tag{12}$$

e pertanto, posto ancora

$$\rho = r/R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad , \quad \rho_1 = r_1/R = \sqrt{(1 - X)^2 + Y^2}, \tag{13}$$

l'equazione di questa curva risulta

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho} - \mu\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) + \frac{1}{2}\left[\rho^2 + \mu(1 - 2X)\right] - \\ &- \left\{ \frac{1-\mu}{X_0} + \frac{\mu}{1 - X_0} + \frac{1}{2}\left[X_0^2 + \mu(1 - 2X_0)\right] \right\} = 0 . \end{aligned} \tag{14}$$

(2) G. DARWIN, *On Periodic Orbits*, « British Assoc. Report », 708–779 (1896); IDEM, *Periodic Orbits*, « Acta Mathem. », *21*, 99–242 (1897); « Mathem. Ann. » Bd. *51*, 523–583 (1899); « Scientific Papers », *4*, 1–113 (1911); IDEM, *On certain Families of Periodic Orbits*, « Monthly notices », *70*, 108–143 (1910); « Collected Papers », *4*, 140–181.

La curva è simmetrica rispetto all'asse X, poiché cambiando Y in $-Y$ l'equazione (14) si muta in se stessa, e si tratta di una curva algebrica del 16^o ordine avente un nodo nel punto $(X_0, 0)$. Invero, indicando con $F(X, Y)$ il primo membro della (14), poiché nel punto $(X_0, 0)$ è $F(X_0, 0) = 0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0 = 0$, e si riconosce inoltre che è $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}\right)_0 = 0$, l'equazione complessiva delle tangenti in questo punto risulta

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right)_0 (X - X_0)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right)_0 Y^2 = 0 .$$

Ora si ha

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right)_0 = \frac{2(1-\mu)}{X_0^3} + \frac{2\mu}{(1-X_0)^3} > 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right)_0 = -\left(\frac{1}{X_0^3} - 1\right) - \frac{\mu}{(1-X_0)^3}\left[1 - \frac{(1-X_0)^3}{X_0^3}\right] < 0 .$$

La curva ammette perciò nel punto $(X_0, 0)$ due rette tangenti reali e distinte, disposte simmetricamente rispetto all'asse X. Essa è composta di due cappi che si avvolgono rispettivamente intorno ai due corpi P_0, P_1. Nel primo cappio si svolgono le traiettorie del satellite che circondano il corpo P_0 e lasciano all'esterno P_1; nel secondo cappio invece si svolgono le traiettorie che circondano il corpo P_1 e lasciano all'esterno P_0.

3. Facciamo vedere ora che esistono delle traiettorie che, svolgendosi nei due cappi della detta curva di velocità nulla, e abbracciando entrambi i corpi principali P_0 e P_1, passano da un cappio all'altro attraverso il punto di librazione L_1, ed ivi i due tratti di traiettoria, situati da una parte e dall'altra dell'asse X, sono tangenti e formano una cuspide.

Riprendiamo per questo le equazioni (3) del moto, che in base alle posizioni (8) e (13) e ponendo ancora

$$\tau = nt, \tag{15}$$

assumono la forma adimensionale più semplice

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2X}{d\tau^2} - 2\frac{dY}{d\tau} = -\left[(1-\mu)\frac{X}{\rho^3} - \mu\frac{1-X}{\rho_1^3}\right] + X - \mu \equiv \frac{\partial\Omega^*}{\partial X} \\ &\frac{d^2Y}{d\tau^2} + 2\frac{dX}{d\tau} = -\left[\frac{1-\mu}{\rho^3} + \frac{\mu}{\rho_1^3}\right] Y + Y \equiv \frac{\partial\Omega^*}{\partial Y}, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

dove è ora

$$\Omega^* = \frac{1-\mu}{\rho} + \frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1}{2}\left[(1-\mu)\rho^2 + \mu\rho_1^2\right]. \tag{17}$$

Inoltre l'integrale (5) di Jaboci diventa

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2\right] = \Omega^* - \frac{1}{2}C^*, \qquad (C^* = C/(n^2 R^2)). \tag{18}$$

Le equazioni (16) del moto del satellite si mutano in se stesse cambiando τ in $-\tau$, Y in $-$Y, e lasciando inalterata la X. Contando perciò i tempi a partire da un istante in cui il satellite attraversa l'asse X, si deduce che le traiettorie sono simmetriche rispetto a quest'asse.

Per vedere che esistono delle traiettorie che passano per il punto di librazione $X = X_0$, $Y = 0$, supponiamo che in un istante che assumiamo come iniziale, il satellite sia lanciato da questo punto con velocità $\dot{x} = v_0$, $\dot{y} = 0$, cioè con

$$X' \equiv \frac{dX}{d\tau} = \nu_0 = v_0/(Rn) \quad , \quad Y' \equiv \frac{dY}{d\tau} = 0 . \tag{19}$$

Gli integrali delle equazioni (16) del moto, nell'intorno del punto $(X_0, 0)$, e per τ sufficientemente piccolo, saranno rappresentabili nella forma

$$\left\{ \begin{aligned} X &= X_0 + \nu_0 \tau + \frac{1}{2!} X_0'' \tau^2 + \frac{1}{3!} X_0''' \tau^3 + \cdots \\ Y &= \qquad\qquad \frac{1}{2!} Y_0'' \tau^2 + \frac{1}{3!} Y_0''' \tau^3 + \cdots \end{aligned} \right. \tag{20}$$

Ora nel punto $(X_0, 0)$, essendo $\partial\Omega^*/\partial X = 0$, $\partial\Omega^*/\partial Y = 0$, le equazioni (16) del moto, in base alle condizioni iniziali (19), porgono

$$X_0'' = 0 \quad , \quad Y_0'' = -2\nu_0 \tag{21}$$

e pertanto le (20) si riducono alle seguenti

$$\left\{ \begin{aligned} X &= X_0 + \nu_0 \tau + \frac{1}{3!} X_0''' \tau^3 + \frac{1}{4!} X_0^{IV} \tau^4 + \cdots \\ Y &= \quad -\nu_0 \tau^2 + \frac{1}{3!} Y_0''' \tau^3 + \frac{1}{4!} Y_0^{IV} \tau^4 + \cdots \end{aligned} \right. \tag{22}$$

Sostituendo questi valori di X, Y nelle equazioni (16), e sviluppando opportunamente i diversi termini in serie di potenze di τ, con facili calcoli si ottengono le relazioni

$$\begin{aligned} &X_0''' \tau + \frac{1}{2!} X_0^{IV} \tau^2 + \frac{1}{3!} X_0^{V} \tau^3 + \cdots - 2\left[-2\nu_0 \tau + \frac{1}{2!} Y_0''' \tau^2 + \frac{1}{3!} Y_0^{IV} \tau^3 + \cdots\right] = \\ &= -\frac{1-\mu}{X_0^2} \left\{ 1 - \frac{2\nu_0}{X_0} \tau + \frac{3\nu_0^2}{X_0^2} \tau^2 - \left(\frac{1}{3} \frac{X_0'''}{X_0} + 4 \frac{\nu_0^3}{X_0^3} \right) \tau^3 + \cdots \right\} + \\ &+ \frac{\mu}{(1-X_0)^2} \left\{ 1 + \frac{2\nu_0}{1-X_0} \tau + \frac{3\nu_0^2}{(1-X_0)^2} \tau^2 + \left[\frac{1}{3} \frac{X_0'''}{1-X_0} + 4 \frac{\nu_0^3}{(1-X_0)^3} \right] \tau^3 + \cdots \right\} + \\ &\qquad + X_0 + \nu_0 \tau + \frac{1}{3!} X_0''' \tau^3 + \cdots - \mu , \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &Y_0''' \tau + \frac{1}{2!} Y_0^{IV} \tau^2 + \frac{1}{3!} Y_0^{V} \tau^3 + \cdots + 2\left[\frac{1}{2!} X_0''' \tau^2 + \frac{1}{3!} X_0^{IV} \tau^3 + \cdots\right] = \\ &= -\nu_0 \tau^2 + \frac{1}{3!} Y_0''' \tau^3 + \cdots + \frac{1-\mu}{X_0^3} \left[\nu_0 \tau^2 - \left(\frac{3\nu_0^2}{X_0} + \frac{1}{6} Y_0''' \right) \tau^3 + \cdots \right] + \\ &\qquad + \frac{\mu}{(1-X_0)^3} \left[\nu_0 \tau^2 + \left(3 \frac{\nu_0^2}{1-X_0} - \frac{1}{6} Y_0''' \right) \tau^3 + \cdots \right] . \end{aligned} \tag{24}$$

Per piccoli valori di τ le (23) e (24) dovranno risultare delle identità. Uguagliando perciò nella (23) i coefficienti delle potenze di $\tau, \tau^2, \tau^3, \cdots$, nei due membri, e tenendo conto dell'equazione cui soddisfa X_0, si ottiene

$$(25)\quad \begin{cases} X_0''' + 4\nu_0 = 2\nu_0 \left[\dfrac{1-\mu}{X_0^3} + \dfrac{\mu}{(1-X_0)^3}\right] \\ \dfrac{1}{2} X_0^{IV} - Y_0''' = -3\nu_0^2 \left[\dfrac{1-\mu}{X_0^4} - \dfrac{\mu}{(1-X_0)^4}\right] \\ \dfrac{1}{6} X_0^{V} - \dfrac{1}{3} Y_0^{IV} = \dfrac{1-\mu}{X_0^2}\left(\dfrac{1}{3}\dfrac{X_0'''}{X_0} + 4\dfrac{\nu_0^3}{X_0^3}\right) + \\ \qquad + \dfrac{\mu}{(1-X_0)^2}\left[\dfrac{1}{3}\dfrac{X_0'''}{1-X_0} + 4\dfrac{\nu_0^3}{(1-X_0)^3}\right] + \dfrac{1}{6} X_0''' \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Analogamente dalla (24) si deduce

$$(26)\quad \begin{cases} Y_0''' = 0 \\ \dfrac{1}{2} Y_0^{IV} + X_0''' = -\nu_0 + \left[\dfrac{1-\mu}{X_0^3} + \dfrac{\mu}{(1-X_0)^3}\right]\nu_0 \\ \dfrac{1}{2} Y_0^{V} + X_0^{IV} = \dfrac{1}{2} Y_0''' - \dfrac{1-\mu}{X_0^3}\left(\dfrac{9\nu_0^2}{X_0} + \dfrac{1}{2} Y_0'''\right) + \dfrac{\mu}{(1-X_0)^3}\left(\dfrac{9\nu_0^2}{1-X_0} - \dfrac{1}{2} Y_0'''\right) \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Si ricava quindi

$$X_0''' = -3\nu_0 + 2\nu_0\left[\frac{1-\mu}{X_0^3} + \frac{\mu}{(1-X_0)^3}\right] \quad ; \quad Y_0''' = 0$$

$$X_0^{IV} = -6\nu_0^2\left[\frac{1-\mu}{X_0^4} - \frac{\mu}{(1-X_0)^4}\right] \quad ; \quad Y_0^{IV} = 4\nu_0 - 2\nu_0\left[\frac{1-\mu}{X_0^3} + \frac{\mu}{(1-X_0)^3}\right]$$

$$\begin{aligned} X_0^{V} = {} & 5\nu_0 - 8\nu_0\left[\frac{1-\mu}{X_0^3} + \frac{\mu}{(1-X_0)^3}\right] + 4\nu_0\left[\frac{1-\mu}{X_0^3} + \frac{\mu}{(1-X_0)^3}\right]^2 + \\ & + 24\nu_0^3\left[\frac{1-\mu}{X_0^5} + \frac{\mu}{(1-X_0)^5}\right] \quad ; \quad Y_0^{V} = -6\nu_0^2\left[\frac{1-\mu}{X_0^4} - \frac{\mu}{(1-X_0)^4}\right] \end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

e le equazioni del moto nell'intorno del punto $(X_0, 0)$, per τ sufficientemente piccolo, e nelle condizioni iniziali (19), risultano

$$(27)\quad \begin{cases} X = X_0 + \nu_0\tau - \dfrac{1}{6}\nu_0\left\{3 - 2\left[\dfrac{1-\mu}{X_0^3} + \dfrac{\mu}{(1-X_0)^3}\right]\right\}\tau^3 - \\ \quad - \dfrac{1}{4}\nu_0^2\left[\dfrac{1-\mu}{X_0^4} - \dfrac{\mu}{(1-X_0)^4}\right]\tau^4 + \cdots \\ Y = -\nu_0\tau^2 + \dfrac{1}{12}\nu_0\left\{2 - \left[\dfrac{1-\mu}{X_0^3} + \dfrac{\mu}{(1-X_0)^3}\right]\right\}\tau^4 + \cdots \end{cases}$$

Per τ sufficientemente piccolo, cambiando τ in $-\tau$ la Y non cambia di segno. Quindi nell'intorno del punto $(X_0, 0)$ la traiettoria è tutta situata da una parte dell'asse X. Inoltre, cambiando ν_0 in $-\nu_0$, si ha che il tratto di andata e quello di ritorno, in corrispondenza dello stesso punto, sono da parti opposte, simmetrici rispetto all'asse X, e tangenti nel punto $(X_0, 0)$.

Osserviamo ancora che per le traiettorie della classe che stiamo considerando, nel caso limite in cui ν_0 tende a zero, il punto $(X_0, 0)$ è un punto a *meta asintotica*.

Invero per le traiettorie che passano per il punto $(X_0, 0)$, con velocità ν_0, l'integrale (18) diventa

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2\right]=\Omega^*(X, Y)-\Omega^*(X_0, 0)+\frac{1}{2}\nu_0^2$$

da cui si ricava

$$\frac{dX}{d\tau}=\pm\sqrt{2\left\{\Omega^*(X, Y)-\Omega^*(X_0, 0)+\frac{1}{2}\nu_0^2\right\}}\Big/\sqrt{1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2}\,. \tag{28}$$

Ora, per quanto si è visto dall'analisi della funzione $F(X, Y)=\Omega^*(X, Y)-$ $-\Omega^*(X_0, 0)$, definita dalla (14), si ha

$$\Omega^*(X, Y)-\Omega^*(X_0, 0)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2\Omega^*}{\partial X^2}\right)_0(X-X_0)^2+\left(\frac{\partial^2\Omega^*}{\partial Y^2}\right)_0 Y^2\right\}+\eta_3,$$

dove η_3 indica termini di 3^o ordine in $X-X_0$ ed Y. Ne segue che il secondo membro della (28), per $\nu_0\to 0$, tende a zero del primo ordine quando $X\to X_0$ ed $Y\to 0$. Perciò, partendo il punto mobile da una certa posizione iniziale verso la posizione $(X_0, 0)$, vi impiega un tempo infinito.

SUMMARY. — In this paper we consider the problem of the motion of an artificial satellite revolving round the earth and the moon, and we show that the centre of libration, situated between the earth and the moon, is an asymptotic point for the motion. Furthermore, there are periodic orbits that are tangential, at the centre of libration, to the straight line joining the earth and the moon, for both the outward and the return journey.