Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ettore Picasso

Metriche riemanniane tensoriali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.3-4, p. 175–182.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_3-4_175_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Geometria. — *Metriche riemanniane tensoriali* [*]. Nota [**] di ETTORE PICASSO, presentata dal Socio B. SEGRE.

I. È ben noto che, in un R_n euclideo, accanto alla classica geometria vettoriale metrica relativa ad un assegnato tensore fondamentale a_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$, si può in modo del tutto analogo sviluppare una *geometria bivettoriale*, connessa al sistema fondamentale $a_{(ij)(hk)}$ a due indici composti $(ij), (hk)$ (ciascuno dei quali si faccia variare entro le $n(n-1)/2$ combinazioni di classe 2 dei numeri $1, 2, \cdots, n$) di componenti

$$a_{(ij)(hk)} = a_{ih}\, a_{jk} - a_{jh}\, a_{ik} \qquad (i, j, h, k, \cdots, = 1, 2, \cdots, n). \tag{I.1}$$

In conseguenza della definizione, le $a_{(ij)(hk)}$ verificano i seguenti caratteri di simmetria ed alternanza

$$a_{(ij)(hk)} = a_{(hk)(ij)} = - a_{(ji)(hk)} = - a_{(ij)(kh)} \tag{I.2}$$

e soddisfano alla relazione

$$a_{(ij)(hk)} + a_{(hi)(jk)} + a_{(hj)(ki)} = 0 ; \tag{I.3}$$

cosicché, delle componenti con gli stessi indici, due soltanto risultano indipendenti.

La proprietà ora richiamata è alla base delle nozioni di *connessione metrica tensoriale* e di *spazio di Wely*, da me recentemente indicate in [4] per tensori controvarianti plückeriani come particolari sottoclassi di connessioni affini tensoriali.

Quando però ci si proponga di caratterizzare sottoclassi di connessioni affini tensoriali assimilabili alle *connessioni riemanniane o di Levi-Civita*, resta da compiere un passo essenziale: quello di costruire a partire dal tensore $a_{(ij)(hk)}$ ad indici composti, variabili entro le sopraddette combinazioni di classe 2, che definisce la metrica tensoriale, una sorta di derivazione covariante con la quale si possa operare al modo consueto su tensori doppi alternanti e in particolare plückeriani. S'intende che tale costruzione deve prescindere dall'esistenza in R_n di una qualunque metrica vettoriale od almeno risultare, comunque, indipendente da questa; le componenti $a_{(ij)(hk)}$ dovranno supporsi, in conseguenza, funzioni arbitrariamente assegnate, assoggettate soltanto alle condizioni di simmetria e alternanza (I.2) [1].

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del 17° Gruppo di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 2 settembre 1965.

(1) Alla caratterizzazione e costruzione di metriche riemanniane su una varietà differenziabile (reale) M e, in particolare, su una varietà (reale o complessa) di Grassmann, che risultino invarianti rispetto ad un assegnato gruppo G di rappresentazioni (omomorfe e differenziabili) di M in sé, è dedicata una recente Memoria di KURT LEICHTWEISS (cfr. [3]).

Questa ulteriore estensione tensoriale è resa possibile dall'esistenza di forme lineari delle derivate prime di tali componenti che dipendono da cinque indici e che assumono, nei confronti dei tensori quadratici del tipo considerato, il ruolo che per i vettori hanno gli ordinari simboli di Christoffel.

Indicate con $\left\{ {ik \atop rst} \right\}$ le forme a cinque indici da costruire, le relazioni

$$(\text{I}.4) \qquad \nabla_t \xi^{ik} = \partial_t \xi^{ik} + \left\{ {ik \atop rst} \right\} \xi^{rs} \quad , \quad \nabla_t \xi_{ik} = \partial_t \xi_{ik} - \left\{ {rs \atop ikt} \right\} \xi_{rs}$$

saranno idonee a definire l'operazione di derivazione covariante per quella classe di tensori, allora e solo che questi simboli subiscano, per un mutamento ammissibile $x \longleftrightarrow x'$ delle coordinate curvilinee, la medesima trasformazione dei parametri di una connessione tensoriale (cfr. Bompiani [1], 480), cioè si abbia

$$(\text{I}.5) \qquad \left\{ {i'k' \atop r's't'} \right\} \theta^i_{i'} \theta^k_{k'} \theta^{t'}_p = \left\{ {ik \atop rsp} \right\} \theta^r_{r'} \theta^s_{s'} + \frac{\partial \theta^i_{r'}}{\partial x^{p'}} \theta^k_{s'} \theta^{p'}_p + \frac{\partial \theta^k_{s'}}{\partial x^{p'}} \theta^i_{r'} \theta^{p'}_p ,$$

$\left(\text{ove, come di consueto, } \theta^{i'}_i = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} , \ \theta^i_{i'} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)$.

II. Premettiamo in questo numero alcuni sviluppi necessari alla costruzione dei simboli a cinque indici e atti, allo stesso tempo, a stabilire le condizioni di esistenza di una metrica vettoriale *subordinata* a quella tensoriale.

Dalle relazioni

$$(\text{II}.6) \qquad a_{(i'j')(h'k')} = a_{(ij)(hk)} \, \theta^i_{i'} \theta^j_{j'} \theta^h_{h'} \theta^k_{k'} ,$$

che attuano il passaggio delle componenti del tensore fondamentale relative ai due sistemi curvilinei x , x', si ottiene per derivazione rispetto ad una generica $x^{r'}$,

$$(\text{II}.7) \qquad \frac{\partial a_{(i'j')(h'k')}}{\partial x^{r'}} = \frac{\partial a_{(ij)(hk)}}{\partial x^r} \theta^i_{i'} \theta^j_{j'} \theta^h_{h'} \theta^k_{k'} \theta^r_{r'} +$$
$$+ a_{(ij)(hk)} \left(\frac{\partial \theta^i_{i'}}{\partial x^{r'}} \theta^j_{j'} \theta^h_{h'} \theta^k_{k'} + \frac{\partial \theta^j_{j'}}{\partial x^{r'}} \theta^i_{i'} \theta^h_{h'} \theta^k_{k'} + \frac{\partial \theta^h_{h'}}{\partial x^{r'}} \theta^i_{i'} \theta^j_{j'} \theta^k_{k'} + \frac{\partial \theta^k_{k'}}{\partial x^{r'}} \theta^i_{i'} \theta^j_{j'} \theta^h_{h'} \right).$$

Con ovvii mutamenti degli indici, si calcolano le derivate prime

$$(\text{II}.8) \qquad \frac{\partial a_{(i'r')(j'k')}}{\partial x^{h'}} , \quad \frac{\partial a_{(i'h')(j'r')}}{\partial x^{k'}} , \quad \frac{\partial a_{(j'r')(h'k')}}{\partial x^{i'}} , \quad \frac{\partial a_{(k'r')(h'i')}}{\partial x^{j'}} .$$

Omessi gli accenti degli indici per alleggerire la scrittura e alternando – secondo l'uso – mediante il simbolo [ ], si constata agevolmente che la seguente espressione lineare delle derivate (II.7) e (II.8)

$$(\text{II}.9) \qquad (ikjrh) = \frac{\partial a_{(i[j)(h]k)}}{\partial x^r} + \frac{\partial a_{(i[r)(j]k)}}{\partial x^h} + \frac{\partial a_{(i[h)(j]r)}}{\partial x^k} +$$
$$+ \frac{\partial a_{(j[r)(h]k)}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{(k[r)(h]i)}}{\partial x^j}$$

è legata alla corrispondente espressione, relativa al nuovo sistema curvilineo x', dalla relazione

$$(\text{II.10}) \qquad (i'\,k'\,j'\,r'\,h') = (ik\,irh)\,\theta^i_{i'}\,\theta^j_{j'}\,\theta^h_{h'}\,\theta^k_{k'}\,\theta^r_{r'} + \\ + (2\,a_{(ik)(hj)} + a_{(ij)(hk)} - a_{(ih)(jk)})\left(\frac{\partial\theta^i_{i'}}{\partial x^{h'}}\,\theta^j_{r'}\,\theta^h_{j'}\,\theta^k_{k'} + \frac{\partial\theta^k_{k'}}{\partial x^{h'}}\,\theta^i_{i'}\,\theta^j_{r'}\,\theta^h_{j'}\right).$$

Le (I.2), (I.3), mostrano che i coefficienti comuni delle derivate seconde nelle (II.10), ossia le espressioni

$$(\text{II.11}) \qquad \mathrm{A}_{(ik)(hj)} = 2\,a_{(ik)(hj)} + a_{(ij)(hk)} - a_{(ih)(jk)}\,,$$

possiedono gli stessi caratteri di simmetria ed alternanza delle $a_{(ik)(hj)}$ e verificano la medesima relazione lineare cui soddisfano le componenti del tensore composto che definisce, mediante le (I.1), la metrica bivettoriale in R_n. Per la supposta trasformazione $x \longleftrightarrow x'$, le $\mathrm{A}_{(ik)(hj)}$ così definite variano cogredientemente alle $a_{(ik)(hj)}$, cioè secondo le (II.6). Se, inoltre, le $a_{(ij)(hk)}$ inizialmente assegnate soddisfano esse medesime alle (I.3), risulta in particolare $\mathrm{A}_{(ik)(hj)} = 3\,a_{(ik)(hj)}$.

Dalle proprietà ora notate segue la possibilità di *normalizzare* le componenti del sistema fondamentale assegnato sostituendo, nei precedenti sviluppi, alle $a_{(ik)(hj)}$ le $\mathrm{A}_{(ik)(hj)}$ date dalle (II.10).

Si può supporre tale sostituzione già effettuata e ritenere che le $a_{(ik)(hj)}$ medesime siano le componenti normalizzate. Proveremo che *il tensore composto fondamentale normalizzato (mediante le* (II.11)), *determina in modo univoco un tensore quadratico simmetrico, atto a definire una metrica vettoriale in* R_n *e legato al primo da relazioni del tipo* (I.1).

Sotto condizioni abbastanze late, precisate dalla forma delle seguenti (II.12), il sistema (I.1) è in effetti risolubile rispetto alle a_{ij}. Introdotto il *tensore ad indici due volte composti*: $a_{\{(ij)(hk)\}\{(mn)(pq)\}}$, costruito mediante le $a_{(ij)(hk)}$ come questo lo è a partire dalle a_{ij} mediante le (I.1) (per cui risulterà, ad esempio, $a_{\{(ij)(hk)\}\{(mn)(pq)\}} = a_{(ij)(mn)}\,a_{(hk)(pq)} - a_{(hk)(mn)}\,a_{(ij)(pq)}$), e posto

$$\mathrm{D}_{(ijh)} = \begin{vmatrix} a_{(ij)(ij)} & a_{(ij)(ih)} & a_{(ij)(jh)} \\ a_{(ih)(ij)} & a_{(ih)(ih)} & a_{(ih)(jh)} \\ a_{(jh)(ij)} & a_{(jh)(ih)} & a_{(jh)(jh)} \end{vmatrix},$$

le espressioni

$$(\text{II.12}) \qquad \frac{a_{\{(ij)(ih)\}\{(ij)(jh)\}}}{\mathrm{D}^{1/2}_{(ijh)}}\,, \qquad \frac{a_{\{(ij)(ih)\}\{(ij)(ih)\}}}{\mathrm{D}^{1/2}_{(ijh)}}$$

sono, la prima indipendente dall'indice h, la seconda dagli indici jh e definiscono le componenti b_{ij}, b_{ii} di un tensore quadratico (simmetrico) verificante il sistema (I.1). Quanto sopra si enuncia col seguente teorema.

Ad un tensore $a_{(ij)(hk)}$ *a due indici composti, ciascuno variabile entro le combinazioni di classe due dei numeri* 1, 2, ⋯, n *arbitrariamente assegnato,* *purché soddisfacente ai caratteri di simmetria e alternanza* (I.2), *resta associato in modo univoco un tensore dello stesso tipo:*

$$A_{(ij)(hk)} = 2\, a_{(ij)(hk)} + a_{(ik)(hj)} - a_{(ih)(kj)}\,,$$

per il quale valgono i medesimi caratteri di simmetria ed alternanza del dato, ma le cui componenti verificano le relazioni lineari (I.3).

La metrica per i bivettori R_n *– definita da questo sistema – ne subordina una vettoriale di componenti fondamentali* (II.12), *dalla quale la prima può ritenersi dedotta tramite le* (I.1).

III) Serbando la massima generalità per le $a_{(ij)(hk)}$, indipendentemente dalla normalizzazione detta sopra, per ottenere i simboli richiesti (simboli di Christoffel generalizzati di 2ª specie), risolviamo le (II.10) rispetto alle derivate seconde. Moltiplicandone i due membri per $\theta_p^{r'}$, $\theta_q^{j'}$, sommando rispetto a r', j' e alternando poi rispetto a i', k', si ha in primo luogo:

$$\text{(III.13)} \qquad ([i'k']\, j'r'h')\, \theta_p^{r'}\, \theta_q^{j'} = ([ik]\, qph)\, \theta_{i'}^{i}\, \theta_{h'}^{h}\, \theta_{k'}^{k} + \\ + 2\, A_{(ik)(qp)} \left(\frac{\partial \theta_{i'}^{i}}{\partial x^{h'}}\, \theta_{k'}^{k} + \frac{\partial \theta_{k'}^{k}}{\partial x^{h'}}\, \theta_{i'}^{i} \right).$$

Introdotto il tensore controvariante fondamentale ad indici composti $a^{(ij)(hk)}$ mediante il sistema lineare

$$\text{(III.14)} \qquad a_{(ij)(hk)}\, a^{(ij)(pq)} = 2\, \delta_{hk}^{pq} \quad , \quad a_{(ij)(hk)}\, a^{(ip)(jq)} = \delta_i^p\, \delta_{hk}^{jq} = -\delta_i^q\, \delta_{hk}^{ip} = \delta_{hk}^{pq}$$

$$(\text{con } \delta_{hk}^{pq} = \delta_h^p\, \delta_k^q - \delta_h^q\, \delta_k^p)\,,$$

sarà possibile abbassare od innalzare gli indici di un medesimo tensore quadratico alternante ponendo:

$$\text{(III.15)} \qquad \xi_{ij} = a_{(ij)(hk)}\, \xi^{hk} \quad , \quad \xi^{hk} = a^{(hk)(ij)}\, \xi_{ij}\,.$$

Nel passaggio $x \longleftrightarrow x'$ questi elementi variano a norma delle relazioni

$$\text{(III.16)} \qquad \xi_{i'j'} = \xi_{ij}\, \theta_{i'}^{i}\, \theta_{j'}^{j} \quad , \quad \xi^{h'k'} = \xi^{hk}\, \theta_h^{h'}\, \theta_k^{k'}\,, \\ a^{(i'j')(h'k')} = a^{(ij)(hk)}\, \theta_i^{i'}\, \theta_j^{j'}\, \theta_h^{h'}\, \theta_k^{k'}\,,$$

formalmente invertibili con lo scambio degli indici delle due serie.

Ciò premesso, moltiplicando ambo i membri delle (III.13) per $a^{(pq)(mn)}$, sommando rispetto a p, q, in forza delle (II.11), (III.14), si ottiene:

$$a^{(qp)(mn)}\, ([i'k']\, j'r'h')\, \theta_p^{r'}\, \theta_q^{j'} = a^{(qp)(mn)}\, ([ik]\, qph)\, \theta_{i'}^{i}\, \theta_{h'}^{h}\, \theta_{k'}^{k} + \\ + \delta_{ik}^{mn} \left(\frac{\partial \theta_{i'}^{i}}{\partial x^{h'}}\, \theta_{k'}^{k} + \frac{\partial \theta_{k'}^{k}}{\partial x^{h'}}\, \theta_{i'}^{i} \right).$$

Da qui, moltiplicando per ξ_{mn} ($\xi_{mn} = - \xi_{nm}$), sommando ed esprimendo il primo membro mediante le sole coordinate x', si ricava:

$$\text{(III.17)} \qquad ([i'k']j'r'h')\, a^{(j'r')(m'n')} = ([ik]\,qph)\, a^{(qp)(mn)}\, \xi_{mn}\, \theta^i_{i'}\, \theta^h_{h'}\, \theta^k_{k'} + \\ + \xi_{ik}\left(\frac{\partial\theta^i_{i'}}{\partial x^{h'}}\, \theta^k_{k'} + \frac{\partial\theta^k_{k'}}{\partial x^{h'}}\, \theta^i_{i'}\right).$$

D'altro canto, per derivazione delle (III.16), risulta:

$$\text{(III.18)} \qquad \partial_{h'}\, \xi_{i'h'} = \partial_h\, \xi_{ik}\, \theta^i_{i'}\, \theta^h_{h'}\, \theta^k_{k'} + \xi_{ik}\left(\frac{\partial\theta^i_{i'}}{\partial x^{h'}}\, \theta^k_{k'} + \frac{\partial\theta^k_{k'}}{\partial x^{h'}}\, \theta^i_{i'}\right);$$

e non resta ormai più che da eliminare le derivate seconde. Si ottiene così:

$$\text{(III.19)} \qquad \partial_{h'}\, \xi_{i'k'} - ([i'k']j'r'h')\, a^{(j'r')(m'n')}\, \xi_{m'n'} = \\ = \{\partial_h\, \xi_{ik} - ([ik]jrh)\, a^{(jr)(mn)}\, \xi_{mn}\} \cdot \theta^i_{i'}\, \theta^h_{h'}\, \theta^k_{k'}\,.$$

Se dunque si pone

$$\text{(III.20)} \qquad \left\{ {mn \atop ikh} \right\} = a^{(jr)(mn)}\, ([ik]jrh)\,,$$

le (I.4), *b*), ove i simboli a cinque indici s'intendano definiti da queste ultime, sono le componenti di un *tensore ottenuto per derivazione covariante mediante il sistema composto che stabilisce la metrica per tensori alternanti o in particolare plückeriani.*

Le espressioni (III.20) *rappresentano i simboli di Christoffel generalizzati, a cinque indici, relativi al sistema fondamentale* $a_{(ij)(hk)}$; abbreviando, li diremo *i simboli di Christoffel tensoriali di seconda specie*; quelli tensoriali di *prima specie* potranno identificarsi, a meno di un fattore numerico costante, con le espressioni $([ik]jrh)$ che si calcolano immediatamente dalle (II.9), ottenendo:

$$\text{(III.21)} \qquad (ik\,jrh) = \frac{\partial a_{(i[j)(h]k)}}{\partial x^r} + \frac{\partial a_{(i[r)(j]k)}}{\partial x^h} + \frac{\partial a_{(i[h)(r]k)}}{\partial x^j} + 2\,\frac{\partial a_{(ih)(jr)}}{\partial x^k} + \\ + \frac{\partial a_{(jh)(ri)}}{\partial x^k} - \frac{\partial a_{(ij)(hr)}}{\partial x^k} + 2\,\frac{\partial a_{(jr)(hk)}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{(kj)(hr)}}{\partial x^i} - \frac{\partial a_{(jh)(rk)}}{\partial x^i}\,.$$

Che anche la (I.4), *a*) rappresenti un tensore per i valori (III.20) dei simboli di Christoffel tensoriali, segue in modo agevole dalle (III.16) e (III.18).

Nei confronti dei simboli delle due specie, va notata la emisimmetria rispetto a j, r delle (III.21) e i caratteri espressi dalle relazioni

$$\text{(III.22)} \qquad \left\{ {rs \atop ijk} \right\} = - \left\{ {sr \atop ijk} \right\} = - \left\{ {rs \atop jik} \right\} = \left\{ {sr \atop jik} \right\}.$$

IV. La metrica tensoriale relativa al sistema $a_{(ij)(hk)}$, quando per tensori quadratici alternanti, o in particolare plückeriani, sia definita l'operazione di derivazione covariante per mezzo delle (I.4) coi valori (III.20) dei simboli tensoriali di Christoffel, possiede in parte gli attributi di una metrica riemanniana vettoriale e dà luogo, con opportune limitazioni, ad operazioni di analisi tensoriale del tipo dell'analisi di Ricci.

Gli elementi sin qui introdotti costituiscono già una premessa sufficiente per una teoria geometrica delle varietà a connessione riemanniana tensoriale; nei confonti di tale geometria, le condizioni

$$d\xi^{ik} = -\left\{ {ik \atop rst} \right\} \xi^{rs} dx^t \tag{IV.23}$$

definiscono una legge di trasporto per la classe di tensori considerata, che si dovrà assumere quale legge di *trasporto parallelo tensoriale di Levi-Civita*. Il tensore di curvatura riemanniana tensoriale che ha l'espressione

$$R_{rstp}^{\cdot\cdot\cdot ik} = \partial_p \left\{ {ik \atop rst} \right\} - \partial_t \left\{ {ik \atop rsp} \right\} + \left\{ {hm \atop rst} \right\} \left\{ {ik \atop hmp} \right\} - \left\{ {hm \atop rsp} \right\} \left\{ {ik \atop hmt} \right\},$$

è suscettibile di un'interpretazione geometrica in tutto simile a quella dell'analogo tensore relativo ad una qualunque connessione affine (cfr. Cossu [2], 338–339), qualora il trasporto ciclico sia definito dalle (IV.23).

Opportune generalizzazioni trovano anche taluni enti e proprietà vettoriali (quali il tensore di Ricci, le identità di Bianchi e il teorema di Schur) e il confronto di enti omonomi nelle due teorie, quando ci si ponga nelle condizioni dell'enunciato del n. II, presenta spesso aspetti non banali.

Esula dagli intendimenti enunciati al n. I, la ricostruzione su queste basi di una teoria riemanniana tensoriale; qui ci limitiamo a dimostrare la seguente significativa proprietà, fornita dal confronto del Lemma di Ricci.

Condizione necessaria e sufficiente affinché sia valido per il sistema fondamentale $a_{(ij)(hk)}$ *che definisce la metrica tensoriale, nell'ipotesi che la derivazione covariante sia effettuata mediante i simboli* (III.20), *l'analogo vettoriale del Lemma di Ricci, ossia perché si abbia* $\nabla_t a_{(ij)(hk)} = 0$, *è che le componenti di quel sistema soddisfino alla relazione lineare* (I.3).

La necessità della condizione segue dal calcolo diretto di $\nabla_t a_{(ij)(hk)}$, che dà

$$\begin{aligned}\nabla_t a_{(ij)(hk)} &= \frac{\partial a_{(ij)(hk)}}{\partial x^t} - \left\{ {mn \atop ijt} \right\} a_{(mn)(hk)} - \left\{ {mn \atop hkt} \right\} a_{(mn)(ij)} = \\ &= \frac{\partial a_{(ij)(hk)}}{\partial x^t} - ([ij]\, hrt) - ([hk]\, ijt).\end{aligned} \tag{IV.24}$$

Operando in questa la sostituzione dei valori (III.21), si perviene alla relazione

$$\begin{aligned}\nabla_t a_{(ij)(hk)} = {} & \frac{\partial}{\partial x^t}[a_{(ij)(hk)} + a_{(ih)(kj)} + a_{(hj)(ki)}] + \frac{\partial}{\partial x^k}[a_{(hi)(tj)} + a_{(it)(hj)} + a_{(th)(ij)}] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x^h}[a_{(ik)(tj)} + a_{(it)(jk)} + a_{(ij)(kt)}] + \frac{\partial}{\partial x^i}[a_{(ht)(kj)} + a_{(hj)(tk)} + a_{(hk)(jt)}] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x^j}[a_{(ih)(tk)} + a_{(ht)(ik)} + a_{(it)(kh)}],\end{aligned}$$

il cui secondo membro, per l'arbitrarietà degli indici, si annulla se e soltanto se sono nulle tutte le quantità entro parentesi: dunque quando, e soltanto quando, le (I.3) sono verificate.

Le (I.3) sono anche sufficienti: nell'attuale ipotesi, infatti, le (III.21) assumono la forma semplificata

$$([ik]\,jrh) = \frac{\partial}{\partial x^r}\, a_{(ik)\,(hj)} + \frac{\partial}{\partial x^h}\, a_{(ik)\,(jr)} + \frac{\partial}{\partial x^j}\, a_{(ik)\,(rh)} + \frac{\partial}{\partial x^k}\, a_{(ih)\,(jr)} + \frac{\partial}{\partial x^i}\, a_{(jr)\,(hk)}\,;$$

e si verifica per sostituzione diretta che, per queste espressioni, l'ultimo membro della (IV.24), è identicamente nullo.

V. I simboli di Christoffel generalizzati qui definiti, possono venir assunti, com'è sempre lecito per le (I.5), quali parametri di una connessione affine tensoriale e rappresentano perciò un esempio concreto di un siffatto *ente geometrico*. Se si opera su tensori alternanti, o in particolare plückeriani, per i quali i simboli di Christoffel generalizzati sono relativi al sistema ad indici composti $a_{(ij)\,(hk)}$ che definisce la metrica tensoriale, o in particolare bivettoriale, la corrispondente varietà è da ritenersi *riemanniana o a connessione di Levi-Civita.*

Come si è già stabilito (cfr. [4], 810), una connessione tensoriale di parametri L^{mn}_{rsq}, per cui $L^{mn}_{rsq} = -L^{nm}_{rsq} = -L^{mn}_{srq}$, è una *connessione metrica bivettoriale* se esistono un tensore ad indici composti $a_{(rs)\,(tp)}$ ed un vettore φ_q per cui:

$$\frac{\partial a_{(rs)\,(tp)}}{\partial x^q} = a_{(rs)\,(mn)}\, L^{mn}_{tpq} + a_{(tp)\,(mn)}\, L^{mn}_{rsq} - 2\, a_{(rs)\,(tp)}\, \varphi_q\,. \tag{V.25}$$

La connessione medesima sarà, in particolare, *euclidea*, se nelle (V.25) è $\varphi_q = 0$. Sostituendo queste nelle (III.21), (III.22) si ottengono, nel caso di una connessione euclidea, i valori dei simboli di Christoffel tensoriali

$$\begin{Bmatrix} pq \\ ikh \end{Bmatrix} = a^{(jr)\,(pq)}\,([ik]\,jrh) = a_{(hk)\,(mn)}\, a^{(jr)\,(pq)}\, [L^{mn}_{ijr} - L^{mn}_{irj} + L^{mn}_{jri}] + \tag{V.26}$$

$$+ a_{(ih)\,(mn)}\, a^{(jr)\,(pq)}\, [L^{mn}_{rkj} - L^{mn}_{jkr} + L^{mn}_{jrk}] + 2\, \delta^{pq}_{mn}\, [2\, L^{mn}_{ikh} + L^{mn}_{hik} + L^{mn}_{khi}]\,.$$

Aggiungendo l'ipotesi che i parametri L^{mn}_{ijk} soddisfino alle condizioni $L^{mn}_{[ijk]} = 0$, ossia, come si dirà estendendo una denominazione propria al caso vettoriale, quando si supponga che la data connessione sia *senza torsione*, per effetto dei caratteri di emisimmetria degli indici superiori e inferiori dei parametri L..., è da porsi indenticamente in questa

$$L^{mn}_{ijr} - L^{mn}_{irj} + L^{mn}_{jri} = L^{mn}_{rkj} - L^{mn}_{jkr} + L^{mn}_{jrk} = L^{mn}_{ikh} + L^{mn}_{hik} + L^{mn}_{khi} = 0\,.$$

La (V.26) si riduce allora semplicemente alla

$$L^{pq}_{ikh} = \begin{Bmatrix} pq \\ ikh \end{Bmatrix} \tag{V.27}$$

e *i parametri della connessione coincidono con i simboli di Christoffel tensoriali.* Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perché la connessione tensoriale di parametri L^{mn}_{ijk}, nell'ipotesi che questi verifichino le condizioni

$$L^{(mn)}_{ijk} = 0 \quad , \quad L^{mn}_{(ij)\,h} = 0 \quad , \quad L^{mn}_{[ijh]} = 0\,,$$

sia una varietà tensoriale riemanniana o a connsesione di Levi–Civita, è che esista un tensore ad indici composti $a_{(ij)(hk)}$ *simmetrico rispetto alle due coppie di indici e alternante rispetto agli indici di una stessa coppia che, in corrispondenza alla condizione* $\varphi_q = 0$, *verifichi l'equazione* (V.26). *I parametri medesimi si identificano allora coi simboli di Christoffel generalizzati relativi a detto tensore.*

Con ciò resta acquisito, per una varietà di dimensione qualunque, quanto era stato precedentemente stabilito per una varietà a tre dimensioni di assegnata connessione tensoriale (cfr. [4], 811).

Riassumendo in un unico enunciato le precedenti conclusioni in relazione alle definizioni poste a suo tempo in [4], si ha che:

Una varietà a connessione affine tensoriale è una varietà a connessione metrica (tensoriale) se esistono un tensore covariante ad indici composti $a_{(ij)(hk)}$, *variabili entro le combinazioni di classe due dei numeri* $1, 2, \cdots, n$, *ed un vettore covariante* φ_q *tali che le* (V.25) *risultino soddisfatte; è una varietà a connessione euclidea se esiste un tensore covariante, ad indici composti, tale che si abbia*

$$\frac{\partial a_{(ij)(hk)}}{\partial x^t} = a_{(ij)(mn)} \mathrm{L}^{mn}_{hkt} + a_{(hk)(mn)} \mathrm{L}^{mn}_{ijt} ; \tag{V.28}$$

è una varietà riemanniana o a connessione di Levi–Civita (tensoriale) se, unitamente alla (V.28), *è verificata la condizione*

$$\mathrm{L}^{mn}_{[ijk]} = 0 .$$

In questo caso risulta necessariamente

$$\mathrm{L}^{mn}_{ijk} = \left\{ \begin{matrix} mn \\ ijk \end{matrix} \right\} ,$$

i simboli di Christoffel tensoriali essendo relativi al sistema fondamentale $a_{(ij)(hk)}$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] BOMPIANI E., *Le connessioni tensoriali*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *1*, 478–482 (1946).

[2] COSSU A., *Alcune osservazioni sulle connessioni tensoriali*, « Rend. Matem. Roma », (5), *13*, 189–198 (1955).

[3] LEICHTWEISS K., *Zur Riemmannschen Geometrie in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten*, « Math. Zeitschr. », *76*, 334–366 (1961).

[4] PICASSO E., *Varietà a connessione metrica tensoriale*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *36*, 808–813 (1964).

SUMMARY. — A composite-index system is defined for introducing a metric into a field of alternating double tensors. By means of its components a geometrical five-index object, analogous to the ordinary CHRISTOFFEL system, is defined. Thus a tensorial-Riemannian Geometry is constructed and some of its particular features are pointed out in comparison with the vectorial ones.