Giuliano Sorani

Sulla rappresentazione delle funzioni olomorfe

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.3-4, p. 161–166.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_3-4_161_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Matematica. — *Sulla rappresentazione delle funzioni olomorfe.* Nota [(*)] di GIULIANO SORANI, presentata dal Socio B. SEGRE.

Questo lavoro contiene una dimostrazione dell'esistenza, nel suo aspetto qualitativo, di una delle formule di E. Martinelli [3] e delle sue estensioni [1]. Il metodo qui seguito mi è stato suggerito da A. Andreotti.

Naturalmente, se si suppone nota la prima delle formule dette, la conoscenza di tutte le altre si ottiene per derivazione, almeno per quanto riguarda la natura qualitativa.

1. Sia $\mathbf{C}^n$ lo spazio complesso di dimensione complessa n, descritto dal punto $z = (z_1, \cdots, z_n)$; una forma differenziale di classe C^∞ è una combinazione lineare a coefficienti funzioni C^∞ dei prodotti esterni dei differenziali delle coordinate complesse z_i e delle loro immaginarie coniugate $\bar{z}_i$. Una tale forma si dice di tipo (r, s) se essa è omogenea di grado r nei differenziali dz_i e di grado s nei differenziali $d\bar{z}_i$; si ha allora:

$$\varphi = \sum_{\substack{\alpha_1 < \cdots < \alpha_r \\ \bar\beta_1 < \cdots < \bar\beta_s}} \varphi_{\alpha_1 \cdots \alpha_r \bar\beta_1 \cdots \bar\beta_s}\, dz_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz_{\alpha_r} \wedge d\bar{z}_{\bar\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{\bar\beta_s}\,.$$

Si chiama supporto di una forma differenziale il complementare del massimo aperto sul quale essa è nulla.

Per ogni aperto $U \subset \mathbf{C}^n$ indichiamo con $\mathcal{D}^{r,s}(U)$ lo spazio $\mathbf{C}$–vettoriale delle forme differenziali C^∞, di tipo (r, s), a supporto compatto contenuto in U. Se $U = \mathbf{C}^n$ scriveremo $\mathcal{D}^{r,s}$ in luogo di $\mathcal{D}^{r,s}(\mathbf{C}^n)$.

In modo analogo si definiscono gli spazi $\mathbf{C}$–vettoriali $\mathcal{E}^{r,s}(U)$, $\mathcal{E}^{r,s}$, delle forme differenziali C^∞, di tipo (r, s), a supporto qualsiasi.

Con $\bar\partial : \mathcal{E}^{r,s} \to \mathcal{E}^{r,s+1}$ indichiamo l'operatore definito da:

$$\bar\partial\varphi = \sum_{\substack{\alpha_1 < \cdots < \alpha_r \\ \bar\beta_1 < \cdots < \bar\beta_{s+1}}} \left(\sum_{h=1}^{n} (-1)^h \frac{\partial \varphi_{\alpha_1 \cdots \alpha_r \bar\beta_1 \cdots \widehat{\bar\beta_h} \cdots \bar\beta_{s+1}}}{\partial \bar{z}_h} \right) dz_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dz_{\alpha_r} \wedge d\bar{z}_{\bar\beta_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{\bar\beta_{s+1}}\,.$$

Se f è una funzione porremo:

$$D^{\alpha\bar\beta} f = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + \bar\beta_1 + \cdots + \bar\beta_n} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}\, \partial \bar{z}_1^{\bar\beta_1} \cdots \partial \bar{z}_n^{\bar\beta_n}}$$

con $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\bar\beta = (\bar\beta_1, \cdots, \bar\beta_n) \in \mathbf{N}^n$, $\mathbf{N}$ = interi positivi o nulli. Porremo anche:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \quad , \quad |\bar\beta| = \bar\beta_1 + \cdots + \bar\beta_n\,.$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 2 settembre 1965.

Se φ è una forma differenziale, con $D^{\alpha\bar{\beta}}\varphi$ indichiamo la forma che ha come coefficienti le indicate derivate parziali dei coefficienti della forma φ.

Una distribuzione $t^{n-r,n-s}$, di tipo $(n-r, n-s)$, su $\mathbf{C}^n$, è un funzionale lineare su $\mathfrak{D}^{r,s}$:

$$t^{n-r,n-s} : \mathfrak{D}^{r,s} \to \mathbf{C}$$

soddisfacente alla seguente condizione di continuità: se $\{\varphi_\nu\}$ è una successione di forme C^∞, di tipo (r, s), a supporto contenuto in un compatto fisso $K \subset \mathbf{C}^n$, tali che $\varphi_\nu \to 0$ uniformemente insieme con tutte le derivate parziali dei coefficienti allora $t[\varphi_\nu] \to 0$.

Sia t una distribuzione su $\mathbf{C}^n$. Sia A l'insieme dei punti $z \in \mathbf{C}^n$ che godono della seguente proprietà: ogni $z \in A$ possiede un intorno aperto U tale che per ogni forma φ, C^∞ a supporto compatto contenuto in U, si ha $t[\varphi] = 0$. Il complementare di A è chiuso in $\mathbf{C}^n$ e si chiama supporto della distribuzione t.

L'operatore $\bar{\partial}$ di differenziazione esterna delle forme differenziali rispetto alle variabili complesse coniugate si estende alle distribuzioni mediante la formula:

$$\bar{\partial} t^{h,k}[\varphi] = (-1)^{h+k+1}\, t^{h,k}[\bar{\partial}\varphi] .$$

Per $0 \leq h, k \leq n$ indicheremo con $T^{h,k}$ il fascio dei germi delle distribuzioni di tipo (h, k) su $\mathbf{C}^n$.

2. Il fascio $\mathcal{O}$ dei germi delle funzioni olomorfe su $\mathbf{C}^n$ è un sottofascio del fascio $T^{0,0}$ dei germi delle distribuzioni di tipo $(0, 0)$. Quindi $\mathcal{O}$ ha una risoluzione in distribuzioni:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{i} T^{0,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} T^{0,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} T^{0,n}$$

che è esatta per il lemma di Dolbeault. Allora il funtore « sezioni » definisce su $\mathbf{C}^n$ il complesso:

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) \xrightarrow{i} \Gamma(\mathbf{C}^n, T^{0,0}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma(\mathbf{C}^n, T^{0,1}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma(\mathbf{C}^n, T^{0,n})$$

che indicheremo con $\oplus\Gamma(\mathbf{C}^n, T^{0,r})$.

Indicata con $\{0\}$ l'origine delle coordinate in $\mathbf{C}^n$, l'inclusione $(\mathbf{C}^n - \{0\}) \to \mathbf{C}^n$ induce, per $0 \leq r \leq n$, un'applicazione:

$$\Gamma(\mathbf{C}^n, T^{0,r}) \xrightarrow{j_r} \Gamma(\mathbf{C}^n - \{0\}, T^{0,r}).$$

Posto $N_r = \operatorname{Ker} j_r$, $M_r = \operatorname{Im} j_r$ si ha la successione esatta di complessi:

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \bigoplus_r N_r \longrightarrow \bigoplus_r \Gamma(\mathbf{C}^n, T^{0,r}) \longrightarrow \bigoplus_r M_r \longrightarrow 0 .$$

Risulta $N_r = \{t^{0,r} \in \Gamma(\mathbf{C}^n, T^{0,r}) \mid \operatorname{Supp} t^{0,r} \subset \{0\}\}$. Le distribuzioni a supporto nell'origine godono della proprietà espressa dal seguente teorema nel caso in cui t è una distribuzione di grado zero.

TEOREMA I (Schwartz). – *Ogni distribuzione t il cui supporto è l'origine è esprimibile in modo unico, come combinazione lineare finita, a coefficienti complessi, di derivate della misura di Dirac, cioè:*

$$t = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\bar{\beta}| \leq q}} c_{\alpha\bar{\beta}} \, D^{\alpha\bar{\beta}} \, \delta_0 .$$

Dalla (1), posto $N^* = \bigoplus_r N_r$, $M^* = \bigoplus_r M_r$, segue la successione esatta di coomologia:

$$\cdots \longrightarrow H^p(N^*) \longrightarrow H^p(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) \longrightarrow H^p(M^*) \longrightarrow H^{p+1}(N^*) \longrightarrow \cdots$$

Poiché per $p \geq 1$, $H^p(\mathbf{C}^n, \mathcal{O}) = 0$ ne segue,

$$H^p(M^*) \cong H^{p+1}(N^*) \qquad (1 \leq p \leq n-1). \tag{2}$$

TEOREMA 2. – Si ha:

a) $H^p(N^*) = 0$ *per* $p \leq n-1$,

b) $H^n(N^*)$ *è generato su* $\mathbf{C}$ *da tutte e sole le derivate della misura di Dirac,* δ_0, *che non contengono derivate rispetto alle* $\bar{z}$.

Dimostrazione:

a) Sia $t^{0,p} \in N_p$, $p \leq n-1$. Per il teorema 1 si ha:

$$t^{0,p} = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \left(\sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\bar{\beta}| \leq q}} c_{\alpha\bar{\beta}} \, D^{\alpha\bar{\beta}} \, \delta_0 \right)_{i_1 \cdots i_p} d\bar{z}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{i_p}$$

dove si è scritto α, $\bar{\beta}$ per $\alpha(i_1, \cdots, i_p)$, $\bar{\beta}(i_1, \cdots, i_p)$.

Poiché $t^{0,p}$ è una distribuzione a supporto compatto è definita la sua trasformata di Fourier:

$$\widehat{t^{0,p}} = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \left(\sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\bar{\beta}| \leq q}} (-1)^{|\bar{\beta}|} \, c_{\alpha\bar{\beta}} \, (i\pi)^{|\alpha| + |\bar{\beta}|} \, \bar{z}^{\alpha} \, z^{\bar{\beta}} \right)_{i_1 \cdots i_p} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} . \tag{3}$$

Dalla (3) appare che le trasformate di Fourier degli elmenti di N_p sono forme differenziali a coefficienti polinomi. Poiché:

$$\frac{\widehat{\partial t^{0,p}}}{\partial \bar{z}_k} = i\pi z_k \, \widehat{t^{0,p}}$$

si ha:

$$\widehat{\bar{\partial} t^{0,p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} i\pi z_k \, dz_k \right) \wedge \widehat{t^{0,p}} .$$

Posto $\theta = \sum_{k=1}^{n} i\pi z_k \, dz_k$, l'equazione $\bar{\partial} t^{0,p} = 0$ si trasforma nella:

$$\theta \wedge \widehat{t^{0,p}} = 0 .$$

Ora in virtù di un teorema di de Rahm [2], se $\theta \wedge \widehat{t^{0,p}} = 0$, risulta $\widehat{t^{0,p}} = \theta \wedge \varphi^{p-1,0}$.

Siccome i coefficienti di $\widehat{t^{0,p}}$ sono polinomi anche quelli di $\varphi^{p-1,0}$ lo sono, cioè:

$$\varphi^{p-1,0} = \sum_{i_1<\cdots<i_{p-1}} \left(\sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\overline{\beta}| \leq q}} \mathrm{P}_{\alpha\overline{\beta}}(z, \overline{z}) \right)_{i_1 \cdots i_{p-1}} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_{p-1}} ;$$

e poiché:

$$\widehat{z_k^m} = \left(-\frac{1}{i\pi}\right)^m \frac{\partial^m}{\partial \overline{z}_k^m} \delta_0 ,$$

$$\widehat{\overline{z}_k^m} = \left(-\frac{1}{i\pi}\right)^m \frac{\partial^m}{\partial z_k^m} \delta_0 ,$$

ne segue che la trasformata di Fourier di $\varphi^{p-1,0}$ è un elemento di N_{p-1} e ciò prova *a*).

b) Per il teorema 1 ogni distribuzione $t^{0,n} \in \mathrm{H}^n(\mathrm{N}^*)$ è del tipo:

$$t^{0,n} = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\overline{\beta}| \leq q}} c_{\alpha\overline{\beta}} (\mathrm{D}^{\alpha\overline{\beta}} \delta_0) \, d\overline{z} ,$$

avendo posto $d\overline{z} = d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_n$. Ogni tale $t^{0,n}$ è un cociclo.

Sia ora $\gamma^{0,n}$ un cobordo in $\mathrm{H}^n(\mathrm{N}^*)$. Risulta $\gamma^{0,n} = \overline{\partial}\psi^{0,n-1}$, essendo $\psi^{0,n-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \, d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\overline{z}_i} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_n$; le a_i sono distribuzioni a supporto su $\{0\}$. Si ha:

$$\overline{\partial}\psi^{0,n-1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{\partial a_i}{\partial \overline{z}_i} \, d\overline{z} .$$

Ancora per il teorema 1,

$$a_i = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\overline{\beta}| \leq q}} c_{\alpha\overline{\beta}}^{(i)} \mathrm{D}^{\alpha\overline{\beta}} \delta_0$$

e quindi:

$$\overline{\partial}\psi^{0,n-1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i} \left(\sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\overline{\beta}| \leq q}} c_{\alpha\overline{\beta}}^{(i)} \mathrm{D}^{\alpha\overline{\beta}} \delta_0 \right) d\overline{z} .$$

Ne segue che se $\gamma^{0,n}$ è un cobordo, $\gamma^{0,n}$ contiene almeno una derivata rispetto ad una delle $\overline{z}$.

Viceversa se

$$t^{0,n} = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\overline{\beta}| \leq q}} c_{\alpha\overline{\beta}} (\mathrm{D}^{\alpha\overline{\beta}} \delta_0) \, d\overline{z}$$

con $q \geq 1$, si ha:

$$t^{0,n} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i} \left(\sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\overline{\beta}| \leq q'}} c_{\alpha\overline{\beta}} \mathrm{D}^{\alpha\overline{\beta}} \delta_0 \right) d\overline{z}$$

con $\varepsilon_i = 0, 1$, gli ε_i non tutti nulli e $q' < q$.

Perciò tutte le derivate della misura di Dirac che contengono almeno una derivata rispetto ad una delle $\bar{z}$ sono cobordi e viceversa; quindi ogni $t^{0,n} \in H^n(N^*)$ è del tipo:

$$t^{0,n} = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha (D^\alpha \delta_0)\, d\bar{z}$$

e ciò prova *b*) e quindi il teorema.

3. Dimostriamo ora il seguente

LEMMA 1. – $H^{n-1}(\mathbf{C}^n - \{0\}, \mathcal{O})$ *è uno spazio di Fréchet.*

Dimostrazione. – Osserviamo che, con ovvia notazione,

$$H^{n-1}(\mathbf{C}^n - \{0\}, \mathcal{O}) \cong \left\{ \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha z^{-\alpha} \right\}$$

ove $|\alpha| \geq 0$ significa $\alpha_i \geq 0$, $(i = 1, \ldots, n)$ e i coefficienti c_α soddisfano la condizione $\lim \sqrt[|\alpha|]{|c_\alpha|} = 0$.

Posto $z_i = u_i^{-1}$ si ha quindi che $H^{n-1}(\mathbf{C}^n - \{0\}, \mathcal{O})$ è isomorfo allo spazio $\left\{ \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha u^\alpha \right\}$ delle serie intere su $\mathbf{C}^n$. Ne segue che, munito della topologia della convergenza uniforme sui compatti, $H^{n-1}(\mathbf{C}^n - \{0\}, \mathcal{O})$ è uno spazio di Fréchet.

Consideriamo ora l'isomorfismo:

$$\Delta : H^{n-1}(M^*) \cong H^n(N^*)$$

dato dalla (2); per il teorema 2, si ha:

$$H^n(N^*) \cong \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta_0 \right\};$$

cioè i generatori di $H^{n-1}(M^*)$ sono dati dagli elementi $\Delta^{-1}(D^\alpha \delta_0)$.

Quindi l'immersione $M^* \to \bigoplus_r \Gamma(\mathbf{C}^n - \{0\}, T^{0,r})$ definisce un omomorfismo naturale

$$\sigma : H^{n-1}(M^*) \to H^{n-1}(\mathbf{C}^n - \{0\}, \mathcal{O})$$

nel quale a $\Delta^{-1}(D^\alpha \delta_0)$ corrisponde $z^{-\alpha}$.

LEMMA 2. – $\operatorname{Im} \sigma$ *è denso e libero in* $H^{n-1}(\mathbf{C}^n - \{0\}, \mathcal{O})$.

Dimostrazione. – Basta osservare che $\operatorname{Im} \sigma$ è generato dalle combinazioni lineari finite delle immagini mediante σ degli elementi $\Delta^{-1}(D^\alpha \delta_0)$, cioè dagli elementi $z^{-\alpha}$ e questi sono d'altra parte linearmente indipendenti.

Siano $B(1)$, $B(2)$ le palle chiuse in $\mathbf{C}^n$, di centro l'origine e raggio 1 e rispettivamente 2; sia $S = \partial B(1)$.

TEOREMA 3. – *Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un aperto $U \supset B(2)$. Per ogni $\alpha \in \mathbf{N}^n$ esistono delle forme $\psi_\alpha^{0,n-1} \in H^{n-1}(\mathbf{C}^n - \{0\}, \mathcal{O})$ tali che, posto $f^{n,0} = f(z)\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$*, risulta:

$$\int_S \psi_\alpha^{0,n-1} \wedge f^{n,0} = c_\alpha (D^\alpha f)(0).$$

Dimostrazione. – Dai lemmi precedenti segue l'esistenza di forme $\psi_\alpha^{0,n-1} \in \in H^{n-1}(\mathbf{C}^n - \{o\}, \mathcal{O})$ tali che $\{\psi_\alpha^{0,n-1}\} = \Delta^{-1}(D^\alpha \delta_0)$. Per il teorema I si ha:

$$\bar{\partial}\psi_\alpha^{0,n-1}[f^{n,0}] = c_\alpha (D^\alpha f)(o).$$

Sia ρ una funzione differenziabile tale che:

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{per } |z| \leq 1 \\ 0 & \text{per } |z| \geq 2. \end{cases}$$

Allora:

$$\bar{\partial}\psi_\alpha^{0,n-1}[\rho f^{n,0}] = \psi_\alpha^{0,n-1}[\bar{\partial}\rho \wedge f^{n,0}] = \int_{\mathbf{C}^n - B(1)} \psi_\alpha^{0,n-1} \wedge \bar{\partial}\rho \wedge f^{n,0} =$$

$$= \int_{B(2)-B(1)} \psi_\alpha^{0,n-1} \wedge \bar{\partial}\rho \wedge f^{n,0} = \int_{B(2)-B(1)} d(\psi_\alpha^{0,n-1} \wedge \rho f^{n,0}) = -\int_S \psi_\alpha^{0,n-1} \wedge f^{n,0}.$$

Poiché su B (1),

$$\bar{\partial}\psi_\alpha^{0,n-1}[\rho f^{n,0}] = \bar{\partial}\psi_\alpha^{0,n-1}[f^{n,0}]$$

si ha la prova del teorema.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. ANDREOTTI e F. NORGUET, *Problème de Levi pour les classes de cohomologie*, «C. R. Acc. Sc. Paris» (1964).

[2] G. DE RAHM, *Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire*, «Comm. Math. Helvetici», 28 (1954).

[3] E. MARTINELLI, *Alcuni teoremi integrali per le funzioni di più variabili complesse*, «Memorie Acc. d'Italia» (1938).

[4] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, vol. I.

[5] V. VILLANI, *Alcuni problemi di natura coomologica sulle varietà complesse*, Pisa, Editrice Tecnico Scientifica (1964).

SUMMARY. — We give a direct proof of some integral formulas due to Martinelli and successively extended by Andreotti and Norguet. The method uses the explicit computation of the cohomology of the space C^n with the origin removed.