ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIOVANNI PROUSE

Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione non omogenea delle onde, con termine dissipativo non lineare. Nota III

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 39 (1965), n.3-4, p. 155-160.

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_3-4_155_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione non omogenea delle onde, con termine dissipativo non lineare.* Nota III di GIOVANNI PROUSE, presentata (*) dal Corrisp. L. AMERIO.

3. Diamo ora le dimostrazioni dei teoremi 3, 4, 5, 6.

Dimostrazione del teorema 3.

Osserviamo anzitutto che, per il teorema I, si ha necessariamente, fissato comunque η_0 ,

$$(3.1) \quad \sup_{\eta \geq \eta_0} \|u_1(\eta)\|_E < +\infty, \quad \sup_{\eta \geq \eta_0} \|u_2(\eta)\|_E < +\infty,$$

essendo $u_1(\eta)$, $u_2(\eta)$ due qualsiasi soluzioni della (I.1).

Posto $w(\eta) = u_1(\eta) - u_2(\eta)$, la funzione $w(\eta)$ risulta ovviamente soluzione dell'equazione

$$(3.2) \quad w''(\eta) - Aw(\eta) + \beta(u_1'(\eta)) - \beta(u_2'(\eta)) = 0,$$

ossia dovrà soddisfare, $\forall h(\eta) \in L^2_{loc}(J; H_0^1)$ a supporto compatto, l'equazione

$$(3.3) \quad \int \{ (w''(\eta), h(\eta))_{L^2} + (w(\eta), h(\eta))_{H_0^1} + (\beta(u_1'(\eta)) - \beta(u_2'(\eta)), h(\eta))_{L^2} \} d\eta = 0.$$

Posto, nella (3.3), $h(\eta) = w'(\eta)$ per $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$ ($\eta_1, \eta_2 \geq \eta_0$), $h(\eta) = 0$ per $\eta \notin [\eta_1, \eta_2]$, si ottiene

$$(3.4) \quad \frac{1}{2} \|w(\eta_2)\|_E^2 - \frac{1}{2} \|w(\eta_1)\|_E^2 + \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\beta(u_1'(\eta)) - \beta(u_2'(\eta)), u_1'(\eta) - u_2'(\eta))_{L^2} d\eta = 0.$$

Osserviamo che dalla (I.5) segue

$$(3.5) \quad (\beta(\xi_2) - \beta(\xi_1))(\xi_2 - \xi_1) \geq h |\xi_2 - \xi_1|^{q+1}$$

e si ha perciò, per la (3.4),

$$(3.6) \quad \|w(\eta_2)\|_E^2 - \|w(\eta_1)\|_E^2 + 2h \int_{\eta_1}^{\eta_2} \|w'(\eta)\|_{L^{q+1}}^{q+1} d\eta \leq 0.$$

(*) Nella seduta dell'8 maggio 1965.

La funzione positiva $\|w(\eta)\|_E$ è perciò non crescente; dovrà quindi essere

$$(3.7) \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \|w(\eta)\|_E = N < +\infty.$$

Dimostriamo che non può essere $N > 0$; con ciò la tesi sarà provata.

Dalle (3.6), (3.7) si deduce anzitutto

$$(3.8) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|w'(t)\|_{L_0^{q+1}} = 0$$

ed inoltre, essendo $L_0^{q+1} \subset L_0^2$,

$$(3.9) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|w(t)\|_{L_0^2(H^b)}^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|w(t)\|_{L_0^2(E)}^2 - \lim_{t \rightarrow +\infty} \|w'(t)\|_{L_0^2}^2 = N^2.$$

Poniamo ora nella (3.3) $h(\eta) = w(\eta)$ per $\eta \in [t, t+1]$ ($t \geq \eta_0$), $h(\eta) = 0$ per $\eta \notin [t, t+1]$; si ha

$$(3.10) \quad (w''(t), w(t))_{L_0^2} + \|w(t)\|_{L_0^2(H^b)}^2 + (\beta(u_1'(t)) - \beta(u_2'(t)), w(t))_{L_0^2} = 0.$$

Risulta d'altra parte, per la (1.5),

$$(3.11) \quad |\beta(u_1') - \beta(u_2')| \leq k |w'| (1 + |w'|^{q-1})$$

e, di conseguenza, posto $Q_t = \Omega \times [t, t+1]$,

$$(3.12) \quad \begin{aligned} & |(\beta(u_1'(t)) - \beta(u_2'(t)), w(t))_{L_0^2}| \leq \\ & \leq \int_{Q_t} \left| \beta\left(\frac{\partial u_1(x, \eta)}{\partial \eta}\right) - \beta\left(\frac{\partial u_2(x, \eta)}{\partial \eta}\right) \right| |w(x, \eta)| dQ \leq \\ & \leq k \int_{Q_t} \left| \frac{\partial w(x, \eta)}{\partial \eta} \right| |w(x, \eta)| \left(1 + \left| \frac{\partial w(x, \eta)}{\partial \eta} \right|^{q-1}\right) dQ \leq \\ & \leq k \left\{ \int_{Q_t} \left| \frac{\partial w(x, \eta)}{\partial \eta} \right|^2 dQ \right\}^{1/2} \left\{ \int_{Q_t} |w(x, \eta)|^2 dQ \right\}^{1/2} + \\ & + k \left\{ \int_{Q_t} \left| \frac{\partial w(x, \eta)}{\partial \eta} \right|^{q+1} dQ \right\}^{q/(q+1)} \left\{ \int_{Q_t} |w(x, \eta)|^{q+1} dQ \right\}^{1/(q+1)} \leq \\ & \leq k \|w'(t)\|_{L_0^2} \|w(t)\|_{L_0^2} + k \|w'(t)\|_{L_0^{q+1}}^q \|w(t)\|_{L_0^{q+1}} \leq \\ & \leq k_2 \|w(t)\|_{L_0^2(E)} [\|w'(t)\|_{L_0^2} + \|w'(t)\|_{L_0^{q+1}}^q]. \end{aligned}$$

Si ha perciò, per le (3.8), (3.12),

$$(3.13) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (\beta(u_1'(t)) - \beta(u_2'(t)), w(t))_{L_0^2} = 0.$$

Dalle (3.9), (3.10), (3.13) segue

$$(3.14) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (w''(t), w(t))_{L_0^2} = -N^2$$

ed anche

$$(3.15) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d}{dt} (w'(t), w(t))_{L_0^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\|w'(t)\|_{L_0^2}^2 + (w''(t), w(t))_{L_0^2}] = -N^2.$$

Se quindi fosse $N > 0$ si avrebbe

$$(3.16) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (w'(t), w(t))_{L_0^2} = -\infty,$$

ciò che è ovviamente assurdo; deve allora essere $N = 0$ ed il teorema è dimostrato.

Dimostrazione del teorema 4.

Per provare questo teorema si procede per assurdo, ammettendo che esistano due soluzioni $u_1(\eta)$ e $u_2(\eta)$ tali che risulti

$$(3.17) \quad \max_{\eta \rightarrow -\infty} \lim \|u_1(\eta)\|_E < +\infty, \quad \max_{\eta \rightarrow -\infty} \lim \|u_2(\eta)\|_E < +\infty.$$

La dimostrazione è del tutto analoga a quella del teorema precedente, pur di sostituire all'intervallo $[\eta_0, +\infty)$ l'intervallo $(-\infty, \eta_0]$; essa non verrà perciò qui riportata.

Dimostrazione del teorema 5.

Introduciamo la successione di funzioni $\{u_n(\eta)\}$ definite nel modo seguente. Per $\eta \geq -n$, $u_n(\eta)$ sia la soluzione della (I.1) soddisfacente alle condizioni iniziali $u_n(-n) = u_n'(-n) = 0$; per $\eta \leq -n$ sia $u_n(\eta) = 0$.

È evidente che, posto

$$(3.18) \quad f_n(\eta) = \begin{cases} f(\eta) & \text{per } \eta \geq -n \\ 0 & \text{per } \eta < -n, \end{cases}$$

la funzione $u_n(\eta)$ sarà una soluzione in J della (I.1) corrispondente al termine noto $f_n(\eta)$. Si ha poi, per le (I.14), (I.17),

$$(3.19) \quad \sup_{\eta \in J} \|u_n(\eta)\|_E = K_1^*, \quad \sup_{t \in J} \|u_n'(t)\|_{L_0^{q+1}} = K_2^*, \quad \sup_{\eta \in J} \|u_n''(\eta)\|_E \leq K_3^*.$$

È quindi possibile estrarre dalla successione $\{u_n(\eta)\}$ una sottosuccessione (che diremo ancora $\{u_n(\eta)\}$) tale che risulti, per ogni $h_1 \in L_0^1(E)$ e per ogni $t \in J$,

$$(3.20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta} (u_n(t+\eta) - \tilde{u}(t+\eta), h_1(\eta))_E d\eta = 0$$

$$(3.21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta} (u_n'(t+\eta) - \tilde{u}'(t+\eta), h_1(\eta))_E d\eta = 0.$$

Dimostriamo che la funzione $\tilde{u}(\eta)$ è una soluzione E -limitata in J della (I.1).

Dalle (3.19), (3.20), (3.21) si deduce anzitutto

$$(3.22) \quad \sup_{\eta \in J} \|\tilde{u}(\eta)\|_E \leq K_1^* \quad , \quad \sup_{\eta \in J} \|\tilde{u}'(\eta)\|_E \leq K_3^*$$

ed è quindi soddisfatta l'ipotesi (a₁) del § 1.

Dalla (3.21) segue inoltre

$$(3.23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty}^* u'_n(t) = \tilde{u}'(t) \quad \text{in } H^1(Q_0)$$

Poiché l'immersione di H^1 in L^2 risulta completamente continua, potremo ammettere senz'altro che risulti

$$(3.24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u'_n(t) = \tilde{u}'(t) \quad \text{in } L^2(Q_0)$$

ossia che $u'_n \rightarrow u'$ quasi ovunque.

Perciò

$$(3.25) \quad \beta(u'_n(t)) \rightarrow \beta(\tilde{u}'(t)).$$

Ricordiamo che le $u_n(\eta)$ soddisfano all'equazione

$$(3.26) \quad \int_J \{ (u''_n(\eta), h(\eta))_{L^2} + (u_n(\eta), h(\eta))_{H_0^1} + (\beta(u'_n(\eta)), h(\eta))_{L^2} - (f_n(\eta), h(\eta))_{L^2} \} d\eta = 0$$

per ogni $h(\eta) \in L^2_{loc}(J; H_0^1)$ a supporto compatto.

Dalle (3.18), (3.20), (3.21), (3.25) si deduce immediatamente

$$(3.27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J \{ (u''_n(\eta), h(\eta))_{L^2} + (u_n(\eta), h(\eta))_{H_0^1} + (\beta(u'_n(\eta)), h(\eta))_{L^2} - (f_n(\eta), h(\eta))_{L^2} \} d\eta = \\ = \int_J \{ (\tilde{u}''(\eta), h(\eta))_{L^2} + (\tilde{u}(\eta), h(\eta))_{H_0^1} + (\beta(\tilde{u}'(\eta)), h(\eta))_{L^2} - (f(\eta), h(\eta))_{L^2} \} d\eta.$$

La funzione limite $\tilde{u}(\eta)$ soddisfa perciò alla (1.3) ed il teorema è provato.

Osserviamo infine che, per i teoremi 3 e 4, non possono esistere altre soluzioni E-limitate in J della (1.1) e, detta $u(\eta)$ una qualsiasi altra soluzione, risulta

$$(3.28) \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \|\tilde{u}(\eta) - u(\eta)\|_E = 0.$$

Dimostrazione del teorema 6.

Osserviamo anzitutto che, posto $g(\eta) = f(\eta) - \beta(\tilde{u}'(\eta))$, la funzione $\tilde{u}(\eta)$ risulta, per il teorema 5, una soluzione E-limitata, con $\tilde{u}'(\eta)$ L^2 -uniformemente continua, dell'equazione

$$(3.29) \quad \tilde{u}''(\eta) - A\tilde{u}(\eta) = g(\eta).$$

Inoltre, grazie alla (1.22), l'immersione di $H^1(Q_0)$ in $L^{q+1}(Q_0)$ è completamente continua e risulta, per la (1.5) e la seconda delle (3.22)

$$(3.30) \quad \|\beta(\tilde{u}'(t))\|_{L^{(q+1)/q}} \leq k_4 [\|\tilde{u}'(t)\|_{L^{(q+1)/q}} + \|\tilde{u}'(t)\|_{L^q}^q] \leq \\ \leq k_5 [\|\tilde{u}'(t)\|_{L^2} + \|\tilde{u}'(t)\|_{H^1(Q_0)}^q] \leq k_5 (K_1^* + K_3^{*q})$$

e, di conseguenza, $g(t)$ è $L_0^{(q+1)/q}$ -limitata in J .

Dimostriamo dapprima che la traiettoria di $\tilde{u}(t)$ è $L_0^2(E)$ -relativamente compatta; seguiremo, per questo, un procedimento dato da Amerio [6] ⁽¹⁾.

Sia $\{t_n\}$ una successione arbitraria; poiché la successione $\{\tilde{u}(t_n)\}$ è, per la prima delle (3.22), $L_0^2(E)$ -limitata e poiché, come si è detto sopra, l'immersione di $L_0^2(E)$ in L_0^{q+1} è completamente continua, è possibile estrarre dalla successione $\{\tilde{u}(t_n)\}$ una sottosuccessione L_0^{q+1} -convergente.

Di conseguenza, la traiettoria di $\tilde{u}(t)$ risulta L_0^{q+1} (e perciò anche $L_0^2(L^{q+1})$)-relativamente compatta.

Grazie ad un lemma dimostrato da Amerio ([6], § 4, lemma II), la traiettoria di $\tilde{u}'(t)$ è allora L_0^2 -relativamente compatta.

Per la dimostrazione che $\tilde{u}(t)$ ha la traiettoria $L_0^2(H_0^1)$ -relativamente compatta, rimandiamo al lavoro, già citato, di Amerio ([6], § 5, III c)); il procedimento ivi seguito può essere applicato, senza alcuna modificazione, al nostro caso, purché si tenga presente la seguente maggiorazione

$$(3.31) \quad \left| \int_{\Delta} \varphi(\eta) (g(t+\eta) - g(\tau+\eta), \tilde{u}(t+\eta) - \tilde{u}(\tau+\eta))_{L^2} d\eta \right| \leq \\ \leq \int_{\Delta} \varphi(\eta) \|g(t+\eta) - g(\tau+\eta)\|_{L^{(q+1)/q}} \|\tilde{u}(t+\eta) - \tilde{u}(\tau+\eta)\|_{L^{q+1}} d\eta \leq \\ \leq 2 \sup_{t \in J} \left\{ \int_{\Delta} \varphi(\eta) \|g(t+\eta)\|_{L^{(q+1)/q}}^2 d\eta \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\Delta} \varphi(\eta) \|\tilde{u}(t+\eta) - \tilde{u}(\tau+\eta)\|_{L^{q+1}}^2 d\eta \right\}^{1/2} \\ (\varphi(\eta) \geq 0).$$

Dimostriamo che la traiettoria di $\tilde{u}(\eta)$ risulta E -relativamente compatta.

Indicata con $\{l_n\}$ una successione reale, poniamo

$$(3.32) \quad w_{jk}(\eta) = \tilde{u}(\eta + l_j) - \tilde{u}(\eta + l_k).$$

La funzione $w_{jk}(\eta)$ soddisfa ovviamente all'equazione

$$(3.33) \quad \int_J \{(w_{jk}'(\eta), h(\eta))_{L^2} + (w_{jk}(\eta), h(\eta))_{H_0^1} + (\beta(\tilde{u}'(\eta + l_j)) - \beta(\tilde{u}'(\eta + l_k)), h(\eta))_{L^2} + \\ - (f(\eta + l_j) - f(\eta + l_k), h(\eta))_{L^2}\} d\eta = 0$$

per ogni $h(\eta) \in L_{loc}^2(J; H_0^1)$, a supporto compatto.

(1) Gli spazi X e Y introdotti da Amerio corrispondono rispettivamente a H_0^1 ed a L^2 ; W è lo spazio che abbiamo indicato con $L_0^2(E)$.

Posto, nella (3.33), $h(\eta) = w'_{jk}(\eta)$ per $\eta \in [\bar{\eta}, 0]$ ($-1 \leq \bar{\eta} < 0$), $h(\eta) = 0$ per $\eta \notin [\bar{\eta}, 0]$ ed osservando che, per la (1.5), è $(\beta(\tilde{u}'(\eta + l_j)) - \beta(\tilde{u}'(\eta + l_k)), w'_{jk}(\eta))_{L^2} \geq 0$, si ottiene

$$(3.34) \quad \|w_{jk}(\bar{\eta})\|_E^2 \geq \|w_{jk}(0)\|_E^2 - 2 \left\{ \int_{\bar{\eta}}^0 \|w'_{jk}(\eta)\|_{L^2}^2 d\eta \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_{\bar{\eta}}^0 \|\mathcal{F}(\eta + l_j) - f(\eta + l_k)\|_{L^2}^2 d\eta \right\}^{1/2} \geq \|w_{jk}(0)\|_E^2 - K \|w'_{jk}(-1)\|_{L^2}.$$

Supponiamo per assurdo che la traiettoria di $\tilde{u}(\eta)$ non sia E-relativamente compatta. Esistono allora una successione $\{l_n\}$ ed un numero $\sigma > 0$ tali che sia

$$(3.35) \quad \|\tilde{u}(l_j) - \tilde{u}(l_k)\|_E = \|w_{jk}(0)\|_E \geq \sigma \quad (j \neq k).$$

Grazie alla L_0^2 -relativa compattezza della traiettoria di $\tilde{u}'(t)$, è poi possibile determinare n_0 in modo tale che, per $j, k > n_0$, risulti

$$(3.36) \quad \|w'_{jk}(-1)\|_{L^2} \leq \frac{\sigma^2}{2K}.$$

Introducendo le (3.35), (3.36) nella (3.34) ed integrando fra -1 e 0 , si ottiene, per $j, k > n_0$,

$$(3.37) \quad \|w_{jk}(-1)\|_{L^2(E)}^2 \geq \frac{\sigma^2}{2},$$

ciò che è assurdo, essendo la traiettoria di $\tilde{u}(t)$ $L_0^2(E)$ -relativamente compatta. Il teorema è così dimostrato.