Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Scorza Dragoni

A proposito di alcuni teoremi sugli autoomeomorfismi del cerchio e della corona circolare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.3-4, p. 151–154.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_3-4_151_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Matematica. — *A proposito di alcuni teoremi sugli autoomeomorfismi del cerchio e della corona circolare.* Nota [*] del Corrisp. GIUSEPPE SCORZA DRAGONI.

In questa Nota, redatta nell'ambito dell'attività dell'Istituto nazionale di alta matematica, mi propongo di mostrare come alcuni recenti teoremi relativi agli autoomeomorfismi della corona circolare e del cerchio siano suscettibili di enunciati particolarmente espressivi.

1. L'ambiente è il piano reale euclideo. In esso si intendono fissate l'unità di misura per i segmenti e quella per gli angoli.

2. E consideriamo dapprima quegli autoomeomorfismi di una corona circolare, che sono privi di punti uniti e che applicano le due circonferenze estreme della corona ciascuna su se stessa.

Sia t un tale autoomeomorfismo della corona circolare. Allora nella corona è sempre presente almeno una curva semplice ed aperta c, che unisca le due circonferenze estreme della corona e che sia libera rispetto a t (cioè che sia priva di punti comuni con la propria immagine, $t(c)$, nella t), oppure almeno una curva semplice e chiusa z, la quale aggiri il centro della corona e si possa spezzare in due archi u e v siffatti, che essi siano entrambi liberi rispetto a t e che il secondo abbia un diametro minore di un numero reale e positivo ε prefissato a piacere (questo non esclude affatto che z possa essere libera essa stessa, nel qual caso anzi essa potrà esser scelta indipendentemente dal valore di ε) [1].

In queste condizioni l'intersezione di z e di $t(z)$ è tutta contenuta nell'unione degli archi semplici ed aperti v e $t(v)$, anzi nell'unione degli interni di questi archi [2]; e si comprende subito che anche all'arco $t(v)$ si può imporre di avere un diametro minore di ε, a patto, all'occorrenza, di ridurre ulteriormente il diametro di v. Sicché:

In ogni tal autoomeomorfismo t della corona circolare è sempre presente, nella corona, almeno una curva semplice ed aperta c, che sia libera rispetto a t e che unisca le due circonferenze estreme della corona, oppure almeno una curva semplice e chiusa z siffatta, che essa aggiri il centro della corona e che l'intersezione di z e t (z) sia tutta contenuta nell'unione degli interni di due archi

(*) Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1965.

(1) G. SCORZA DRAGONI, *Sugli autoomeomorfismi di una corona circolare privi di punti uniti*, « Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova », *33*, pp. 1–32 (1963), pp. 1–2.

(2) L'interno di un arco semplice ed aperto è fornito dall'insieme dei punti dell'arco diversi dagli estremi dell'arco.

semplici ed aperti v *e* $t(v)$, *rispettivamente contenuti in* z *e* $t(z)$ *e coi diametri minori di un numero reale e positivo* ε *prefissato a piacere.*

Questo risultato finisce con l'equivalere perfettamente a quello da cui siamo partiti. Nel fatto, attesa l'arbitrarietà di ε e l'assenza di punti uniti, v e $t(v)$ si possono intanto supporre privi di punti comuni. E se u è l'altro sottoarco individuato su z dagli estremi di v, gli archi u e $t(u)$ allora non possono avere punti comuni: allora infatti gli eventuali punti comuni ad u ed a $t(u)$ appartengono a v, in quanto comuni a z ed a $t(u)$, ed appartengono a $t(v)$, in quanto comuni a u ed a $t(z)$, mentre v e $t(v)$ non hanno punti comuni. E la conclusione ormai è ovvia.

3. Il teorema ricordato nel numero precedente si può affinare, nel senso che allora è sempre presente nella corona almeno una curva semplice ed aperta c, che unisca le due circonferenze estreme della corona e che sia libera rispetto a t, oppure almeno una curva semplice e chiusa z, la quale aggiri il centro della corona e si possa spezzare in due archi u e v siffatti, che uno di essi, u, sia privo di punti in comune con la propria immagine nella t e non incontri nemmeno l'immagine, in t, o in t^{-1}, di tutta la curva z e che l'altro, v, sia libero rispetto a t ed abbia un diametro minore di un numero reale e positivo ε prefissato a piacere (naturalmente anche adesso l'intersezione di z e $t(z)$ potrebbe essere addirittura vuota, nel qual caso z si potrebbe scegliere indipendentemente da ε) [(3)].

Se u non incontra $t(z)$, l'intersezione di z e $t(z)$ appartiene all'interno di v; se u non incontra $t^{-1}(z)$, l'intersezione di z e $t^{-1}(z)$ appartiene all'interno di v e quindi quella di z e $t(z)$ all'interno di $t(v)$, il diametro di $t(v)$ potendosi supporre anch'esso minore di ε, a patto, eventualmente, di diminuire quello di v. Sicché:

In ogni tal autoomeomorfismo t *della corona circolare è sempre presente, nella corona, almeno una curva semplice ed aperta* c, *che sia libera rispetto a* t *e che unisca le due circonferenze estreme della corona, oppure almeno una curva semplice e chiusa* z *siffatta, che essa aggiri il centro della corona e che l'intersezione di* z *e* $t(z)$ *sia completamente contenuta nell'interno di un sottoarco semplice ed aperto di* z, *oppure di* $t(z)$, *dotato di un diametro minore di un numero reale e positivo* ε *prefissato a piacere.*

Anche questo teorema permette di risalire a quello che ci ha consentito di dedurlo. Attesa nel fatto la mancanza di punti uniti e l'arbitrarietà di ε, a quel tale sottoarco si può imporre di essere libero rispetto a t. Dopo di ciò, se esso appartiene a z, diciamolo v; se esso appartiene a $t(z)$, diciamo v la sua immagine nella t^{-1}. E tanto nel primo quanto nel secondo caso diciamo u l'altro sottoarco individuato su z dagli estremi di v. Allora, nel primo caso l'intersezione di z e $t(z)$ è vuota o è formata da punti di v diversi dagli estremi

(3) G. SCORZA DRAGONI, *Il teorema di rotocontrazione per una classe di autoomeomorfismi della corona circolare*, « Annali di matematica pura ed applicata », ser. 4ª, *68*, pp. 267–340 (1965), n. 27.

di v, sicché in questo primo caso l' intersezione di u e $t(z)$ è vuota (ed u è *a fortiori* libero rispetto a t); nel secondo caso l'intersezione di z e $t(z)$ è vuota o è formata da punti di $t(v)$ diversi dagli estremi di $t(v)$, sicché in questo secondo caso l'intersezione di z e $t(u)$ è vuota (epperò è vuota quella di u e $t^{-1}(z)$ ed u è *a fortiori* libero nella t). Donde appunto la conclusione.

4. Gli archi v considerati nei numeri precedenti, in quanto contenuti in una corona circolare fissa ed in quanto arbitrariamente piccoli nel diametro sono visti dal centro della corona sotto angoli arbitrariamente piccoli. Nel caso di autoomeomorfismi del cerchio i quali (applichino il cerchio su se stesso ed) ammettano un solo punto unito, il centro del cerchio, quelle due prime circostanze non permettono più di dedurre quest'ultima. Peraltro le dimostrazioni date per i risultati relativi alla corona circolare nelle Memorie citate permetterebbero di stabilire direttamente sia le prime sia l'ultima circostanza. E poiché quelle dimostrazioni si possono trasportare al caso di quegli autoomeomorfismi del cerchio che (applicano il cerchio su se stesso e che) ammettono come unico punto unito il centro del cerchio, in ogni tal autoomeomorfismo t del cerchio è intanto sempre presente almeno una curva semplice ed aperta c, che unisca il centro del cerchio con la circonferenza estrema del cerchio e che abbia in comune con $t(c)$ soltanto il centro del cerchio, oppure almeno una curva semplice e chiusa z, la quale aggiri il centro del cerchio e si possa spezzare in due archi u e v siffatti, che essi siano entrambi liberi rispetto a t e che il secondo abbia un diametro minore di un numero reale e positivo ε prefissato a piacere e sia visto dal centro del cerchio sotto un angolo minore di ε nella misura (solita osservazione nel caso che z si possa addirittura supporre essa stessa libera rispetto a t) (4). In queste condizioni l'intersezione di z e $t(z)$ è tutta contenuta nell'unione degli interni di v e $t(v)$. Sicché:

In ogni tal autoomeomorfismo t del cerchio è sempre presente, nel cerchio, almeno una curva semplice ed aperta c, che unisca il centro al contorno e che abbia in comune con la propria immagine soltanto il centro, oppure almeno una curva semplice e chiusa z siffatta, che essa aggiri il centro del cerchio e che l'intersezione di z e $t(z)$ sia tutta contenuta nell'unione degli interni di due archi semplici ed aperti v e $t(v)$, liberi rispetto a t e rispettivamente contenuti in z e $t(z)$, all'arco v potendosi imporre altresì di avere un diametro minore del numero reale e positivo ε, prefissato a piacere, e di essere visto dal centro sotto un angolo minore di ε nella misura.

Naturalmente anche questo teorema permette di risalire a quello da cui siamo partiti. E non insisteremo sulla questione. Piuttosto avvertiremo subito che pure adesso le altre condizioni imposte a v si possono imporre anche a $t(v)$, ma si tratta di una circostanza che preciseremo ulteriormente nel prossimo numero.

(4) G. SCORZA DRAGONI, *A proposito degli autoomeomorfismi del cerchio dotati di un punto unito solo*, « Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova », *33*, pp. 332–406 (1963), pp. 332–333.

5. In armonia con le considerazioni esposte nella prima parte del n° 4, anche il teorema ricordato all'inizio del n° 3 e stabilito nella Memoria citata in [3], si può trasportare ai soliti autoomeomorfismi del cerchio, affinando quello ricordato nel numero precedente e stabilito nella Memoria citata in [4]. Precisamente, in ogni tal autoomeomorfismo t del cerchio è sempre presente almeno una curva semplice ed aperta c, che unisca il centro al contorno e che abbia in comune con $t(c)$ soltanto il centro, oppure almeno una curva semplice e chiusa z, che aggiri il centro del cerchio e che si possa spezzare in due archi u e v siffatti, che uno di essi, u, sia privo di punti in comune con la propria immagine nella t e non incontri nemmeno l'immagine, in t, o in t^{-1}, di tutta la curva z e che l'altro, v, sia libero rispetto a t, abbia un diametro minore del numero reale e positivo ε prefissato a piacere e sia visto dal centro sotto un angolo minore di ε nella misura, queste circostanze presentandosi anche per $t^{\pm 1}(v)$, $t^{\pm 2}(v)$, $\cdots$, $t^{\pm n}(v)$, il numero naturale n essendo anch'esso prefissato a piacere (solita osservazione nel caso che z fosse addirittura libera rispetto a t, nel quale caso stavolta z si potrebbe scegliere indipendentemente sia da ε sia da n) [5].

Se u non incontra $t(z)$, l'intersezione di z e di $t(z)$ appartiene all'interno di v; se u non incontra $t^{-1}(z)$, l'intersezione di z e di $t^{-1}(z)$ appartiene all'interno di v e quindi quella di z e $t(z)$ all'interno di $t(v)$, e $t(v)$ ha un diametro minore di ε ed è visto dal centro sotto un angolo minore di ε nella misura insieme con le sue immagini nelle potenze $t^{\pm 1}$, $t^{\pm 2}$, $\cdots$, $t^{\pm(n-1)}$ di t. Sicché:

In ogni tal autoomeomorfismo t del cerchio è sempre presente, nel cerchio, almeno una curva semplice e chiusa c, che unisca il centro al contorno e che abbia in comune con $t(c)$ soltanto il centro, oppure almeno una curva semplice ed aperta, z, che aggiri il centro del cerchio e siffatta che l'intersezione di z e $t(z)$ sia completamente contenuta nell'interno di un sottoarco semplice ed aperto di z, oppure di $t(z)$, libero rispetto a t, dotato di un diametro minore di un numero reale e positivo ε prefissato a piacere e visto dal centro sotto un angolo minore di ε nella misura, queste ultime circostanze presentandosi anche per le immagini del sottoarco nelle potenze $t^{\pm 1}$, $t^{\pm 2}$, $\cdots$, $t^{\pm(n-1)}$ di t, col numero naturale n prefissato anch'esso a piacere.

Anche questo teorema permette, volendo, di risalire a quello da cui lo abbiamo dedotto. Pertanto, nel caso che t ammetta per di più una potenza identica, anche questo teorema consente di ritrovare una circostanza già nota: precisamente, di ritrovare che allora è sempre presente la curva c, che unisce il centro del cerchio al contorno e che ha in comune con la propria immagine soltanto il centro [6].

(5) G. Scorza Dragoni, *Sugli autoomeomorfismi del cerchio dotati di un punto unito unico e interno al cerchio*, in corso di stampa nelle «Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg».

(6) Per maggiori chiarimenti e per indicazioni bibliografiche si vegga l'ultimo paragrafo della Memoria citata in (5).