Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mauro Picone

Commento alla Nota di Wolfango Gröbner del presente fascicolo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.3-4, p. 143–145.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_3-4_143_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1965 Settembre–Ottobre

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione).

Analisi matematica. — *Commento alla Nota di Wolfango Gröbner del presente fascicolo.* Nota (*) del Socio MAURO PICONE.

Pienamente concordo con l'opinione di Wolfango Gröbner, dichiarata nella Nota, secondo la quale l'epressione

$$r(x\,,\,\xi) = e^{\int_x^\xi a(s)\,\mathrm{d}s},$$

che può assumere la matrice risolvente di un sistema normale di p equazioni differenziali lineari ordinarie.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + au = f, \tag{1}$$

in p funzioni incognite, nel caso in cui la matrice $a(x)$ dei coefficienti soddisfa la condizione di permutabilità, nell'intervallo aperto A dell'asse reale x, nel quale deve essere integrato il sistema, ha importanza anche per il calcolo numerico degli integrali del sistema stesso.

Infatti, l'integrale del sistema (1), verificante la condizione iniziale

$$u(x_0) = \mathring{u}\,, \tag{2}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 4 settembre 1965.

è dato dalla formola

$$u(x) = r(x, x_0)\,\overset{\circ}{u} + \int_{x_0}^{x} r(x, \xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{3}$$

che fornisce un vettore $u(x)$ verificante esattamente la condizione iniziale (2) e uno sviluppo in serie, del vettore stesso, della quale è facilmente e ristrettamente maggiorabile il resto relativo ad un qualsivoglia suo termine.

Nel caso particolare in cui $a(x)$ è costante si ha:

$$r(x, x_0) = \delta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x_0 - x)^n}{n!}\, a^n, \tag{4}$$

designando δ la matrice unità, e nella colonna i^{ma} della matrice $r(x, x_0)$ una soluzione $u_i(x)$ del sistema omogeneo

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + au = 0, \tag{1_0}$$

verificando le condizioni iniziali

$$u_{ik}(x_0) = \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, p),$$

essendo δ_{ik} il simbolo di Kronecker, e pertanto, per la soluzione $u(x)$ del sistema (1_0), verificante la condizione iniziale

$$u(x_0) = \overset{\circ}{u},$$

si ha:

$$u(x) = \overset{\circ}{u}_1 u_1(x) + \overset{\circ}{u}_2 u_2(x) + \cdots + \overset{\circ}{u}_p u_p(x), \tag{5}$$

soddisfacendo, così, esattamente quelle condizioni.

Col consueto metodo d'integrazione, fondato sulla rivoluzione dell'equazione algebrica, di grado p, caratteristica del sistema (1_0), non si soddisfano, esattamente, nè le condizioni iniziali, nè l'equazione.

Ritengo che, in pratica, per l'integrazione numerica del sistema (1), con la matrice a costante, dovrebbe, in generale, impiegarsi la formola (3), anziché seguire il metodo della risoluzione dell'equazione algebrica caratteristica del sistema, il che comporta la risoluzione numerica, e quindi approssimata, di parecchi sistemi di equazioni lineari algebriche con coefficienti noti soltanto approssimativamente, nonché l'inversione di una matrice, pur essa nota approssimativamente, funzione della variabile indipendente x, al variare di questa nell'intero intervallo d'integrazione, e, dovendo verificare prescritte condizioni iniziali, la finale risoluzione di un sistema di p equazioni lineari algebriche i cui coefficienti sono essi pure approssimati, pervenendo, alla fine, a risultati affetti da errori di non facile utile maggiorazione.

Con l'impiego delle attuali macchine calcolatrici elettroniche, il calcolo numerico delle potenze a^n $(n = 1, 2, \cdots)$ non offre difficoltà, per valori dell'esponente non molto elevati.

Nell'importante caso particolare di una sola equazione differenziale lineare ordinaria, d'ordine $p+1$,

$$\frac{d^{p+1} v}{dx^{p+1}} + \sum_{k=0}^{p} b_k \frac{d^k v}{dx^k} = f(x),$$

a coefficienti costanti $b_0, b_1, \cdots, b_p$, posto

$$u_0 = v, \ u_1 = \frac{dv}{dx}, \cdots, u_p = \frac{d^p v}{dx^p},$$

la formola (4) fornisce il sistema

$$v_0, v_1, v_2, \cdots, v_p,$$

di soluzioni particolari, dell'equazione omogenea a quella associata, e le derivate di queste d'ordine non superiore a p, verificanti le condizioni iniziali

$$\left[\frac{d^k v_i}{dx^k}\right]_{x=x_0} = \delta_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, \cdots, p),$$

laddove, per il successivo calcolo delle potenze a^n, si ha la formola:

$$a_{hk}^{n+1} \begin{cases} = a_{hp}^n b_0 & , \text{ per } k = 0 \\ = a_{hp}^n b_k - a_{h,k-1}^n, & \text{per } k = 1, 2, \cdots, p, \end{cases}$$

con

$$a_{h0} \begin{cases} = 0, & \text{per } h < p \\ = b_0, & \text{per } h = p \end{cases}, \quad a_{pk} = b_k, \text{ per } k \leq p,$$

$$a_{h,1+k} = -\delta_{hk} \quad (\text{per } h, k = 0, 1, \cdots, p-1).$$