Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Franca Graiff

Sui superpotenziali nella teoria della Relatività Generale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.1-2, p. 46–54.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_1-2_46_0>

Relatività. — *Sui superpotenziali nella teoria della Relatività Generale.* Nota (*) di FRANCA GRAIFF, presentata (**) dal Socio B. FINZI.

1. INTRODUZIONE. – Nella teoria della Relatività Generale, sia per la definizione del contenuto energetico di una regione puramente spaziale di Universo, sia per la deduzione delle equazioni di moto delle singolarità, risultano di particolare interesse quegli oggetti $\mathcal{T}_i^k$ a due indici, di natura non necessariamente tensoriale, soddisfacenti alle seguenti identità, dette di conservazione:

$$\text{(a)} \qquad \mathcal{T}_i{}^k{}_{,k} \equiv 0 \qquad\qquad i , k = 0 , 1 , 2 , 3 .$$

In questi oggetti figura sempre, come addendo, il tensore di Ricci–Einstein, o, tenuto conto delle equazioni di campo, il tensore che rappresenta la materia. Le (a) risultano, in sostanza, conseguenze delle identità del Bianchi contratte; formalmente derivano dalla possibilità di porre l'oggetto stesso sotto la forma:

$$\text{(b)} \qquad \mathcal{T}^k{}_i \equiv \mathfrak{U}_i{}^{kl}{}_{,l}$$

dove $\mathfrak{U}_i^{kl}$ non è necessariamente un tensore, è emisimmetrico rispetto agli indici k ed l, ed è nominato «superpotenziale»: l'oggetto $\mathcal{T}_i^k$ risulta quindi gradiente di un superpotenziale.

Esiste una grande quantità di oggetti conservativi e di superpotenziali, primo tra tutti quello canonico di Einstein [1]: il superpotenziale ad esso corrispondente (ottenibile da un principio variazionale), è quello di Freud [2]. Landau e Lifshitz [3] hanno ottenuto un superpotenziale, con i tre indici tutti in alto , che dà luogo ad un oggetto conservativo con due indici di simmetria. Möller [4] ha poi proposto come superpotenziale, una parte di quello di Freud.

I superpotenziali, con i relativi oggetti conservativi, sopra menzionati, sono tutti costruiti con elementi intrinseci dello spazio–tempo, cioè con il tensore fondamentale e le sue derivate ordinarie prime e seconde.

Altri superpotenziali ed i relativi oggetti conservativi, contenenti anche elementi non intrinseci dello spazio–tempo, provengono da identità ottenibili con metodi basati sulle trasformazioni infinitesime delle coordinate (Bergmann [5], Komar [6], o da una teoria relativistica bimetrica [7], [8], [9] di Rosen).

In questa Nota dimostro che, partendo dalle identità (b) di Freud, scritte in un riferimento $\bar{x}$, mediante trasformazioni finite di coordinate, si possono

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 17 giugno 1965.

ottenere superpotenziali ed identità di conservazione, tra i quali rientrano, in particolare, anche quelli di Bergmann, Komar, Rosen. Precisamente:

a) una trasformazione finita di coordinate, ma parziale rispetto agli indici, dà luogo a superpotenziali rappresentati da sistemi semplici di densità tensoriali doppie emisimmetriche; le corrispondenti identità di conservazione riguardano sistemi di densità vettoriali. Con questo metodo è possibile dedurre anche i superpotenziali di Bergman e di Komar.

Superpotenziali e grandezze che si conservano, possono essere espressi, oltre che da elementi intrinseci dello spazio–tempo, mediante un sistema di quattro vettori e delle loro derivate tensoriali, vettori che denunciano la provenienza delle identità dal sistema $\bar{x}$;

b) una trasformazione completa di coordinate dà invece luogo a un superpotenziale rappresentato da una densità tensoriale tripla, con due indici di emissimetria. Le corrispondenti identità di conservazione riguardano però un sistema doppio, di natura non tensoriale. In questo caso, mentre il superpotenziale trovato coincide con quello di Rosen [8], il corrispondente oggetto risulta diverso.

Si può proporre infine, come ulteriore superpotenziale, una parte di quello precedentemente trovato: la solita operazione (b) darà luogo al corrispondente oggetto conservativo.

Superpotenziali ed oggetti conservativi risultano ancora espressi, oltre che da elementi intrinseci dello spazio–tempo, mediante il sistema dei quattro vettori sopra considerati.

Noto infine che solamente il primo sistema doppio conservativo, ottenuto col secondo metodo, soddisfa alle condizioni necessarie per poter essere interpretato come sistema « Energia, quantità di moto », in analogia con quello del Möller ultimamente proposto [10].

2. DEDUZIONE DI UN SUPERPOTENZIALE MEDIANTE UNA TRASFORMAZIONE PARZIALE DI COORDINATE. – In una varietà riemanniana, di metrica:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \qquad i, k = 0, 1, 2, 3. \tag{1}$$

sia $\alpha^{ik} = \sqrt{-g}\, g^{ik}$ la densità fondamentale, R_{ik} il tensore di Riemann contratto, G_{ik} il tensore di Ricci–Einstein, $\mathfrak{G}_{ik}$ la sua densità.

In un riferimento $\bar{x}$ (per ora qualsiasi), l'identità che definisce il sistema canonico Θ_i^k di Einstein, proveniente dal superpotenziale di Freud, è la seguente:

$$\overline{\Theta}_i^k \equiv \overline{\mathfrak{G}}_i{}^k + \frac{1}{2}\, \bar{t}_i{}^k = -\frac{1}{2}\, \overline{\mathfrak{U}}_i{}^{kl}{}_{,l} \tag{$\bar{\text{b}}$}$$

dove:

$$\bar{t}_i{}^k = \bar{\alpha}^{pq}{}_{,i}\left(\delta_p^k \overline{\left\{ {t \atop tq} \right\}} - \overline{\left\{ {k \atop pq} \right\}}\right) - \delta_i^k\, \bar{\alpha}^{rs}\left[\overline{\left\{ {j \atop lr} \right\}}\, \overline{\left\{ {l \atop js} \right\}} - \overline{\left\{ {j \atop rs} \right\}}\, \overline{\left\{ {t \atop tj} \right\}}\right] \tag{2}$$

$$\overline{\mathfrak{U}}_i{}^{kl} \equiv \delta_i^k\left(\bar{\alpha}^{lj} \overline{\left\{ {s \atop sj} \right\}} - \bar{\alpha}^{pq} \overline{\left\{ {l \atop pq} \right\}}\right) - \delta_i^l\left(\bar{\alpha}^{kj} \overline{\left\{ {s \atop sj} \right\}} - \bar{\alpha}^{pq} \overline{\left\{ {k \atop pq} \right\}}\right) + \bar{\alpha}^{kj} \overline{\left\{ {l \atop ij} \right\}} - \bar{\alpha}^{lj} \overline{\left\{ {k \atop ij} \right\}}. \tag{3}$$

Le identità (a) di conservazione alle quali soddisfa il sistema canonico Θ_i^k di Einstein, sopra definito, sono, in sostanza, le identità contratte del Bianchi [1].

Il superpotenziale (3) di Freud, può anche essere espresso come somma:

$$(3') \qquad \overline{\mathfrak{U}}_i^{\,kl} = \underset{1}{\overline{\mathfrak{U}}_i^{\,kl}} + \underset{2}{\overline{\mathfrak{U}}_i^{\,kl}}$$

dove:

$$(4\text{ a}) \qquad \underset{1}{\overline{\mathfrak{U}}_i^{\,kl}} = \frac{1}{2}\,\delta_i^k\,\overline{\mathfrak{U}}_t^{\,tl} - \frac{1}{2}\,\delta_i^l\,\overline{\mathfrak{U}}_t^{\,tk}$$

$$(4\text{ b}) \qquad \underset{2}{\overline{\mathfrak{U}}_i^{\,kl}} = \bar{\alpha}^{kj}\left\{ {\bar{l} \atop ij} \right\} - \bar{\alpha}^{lj}\left\{ {\bar{k} \atop ij} \right\} = \sqrt{-\bar{g}}\;\bar{g}^{kj}\,\bar{g}^{lt}\,(\bar{g}_{it,j} - \bar{g}_{ij,t})\ {}^{(2)}.$$

Eseguo ora sulla $(\bar{\text{b}})$ una trasformazione finita di coordinate, ma parziale, considerando cioè i come indice ordinale, k di controvarianza.

Se $\bar{\text{J}}$ è il determinante della trasformazione, si fà cioè:

$$(5) \qquad \bar{\text{J}}\left(\bar{\mathfrak{G}}_i^{\,k} + \frac{1}{2}\,\bar{t}_i^{\,k}\right)\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} = -\frac{1}{2}\,\bar{\text{J}}\,\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\,\overline{\mathfrak{U}}_i^{\,kl}{}_{,l}$$

che diventa:

$$(5') \qquad \mathfrak{G}_j^{\,r}\,\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} + \frac{1}{2}\,\bar{\text{J}}\,\bar{t}_i^{\,k}\,\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x^s}\left(\bar{\text{J}}\,\overline{\mathfrak{U}}_i^{\,kl}\,\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\,\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l}\right).$$

Da questa si può definire un nuovo superpotenziale, con il relativo oggetto conservativo, e ricavarne altri già noti.

Si può infatti definire il seguente superpotenziale, che risulta un sistema semplice di densità tensoriali doppie emisimmetriche:

$$(6) \qquad \underset{(i)}{\mathfrak{V}^{rs}} \equiv \bar{\text{J}}\,\overline{\mathfrak{U}}_i^{\,kl}\,\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}\,\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^l}$$

ed il corrispondente oggetto $\underset{(i)}{\mathfrak{T}^r}$ soddisfacente alle identità di conservazione (a), risulta il sistema semplice di densità vettoriali:

$$(7) \qquad \underset{(i)}{\mathfrak{T}^r} \equiv \mathfrak{G}_j^{\,r}\,\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} + \frac{1}{2}\,\bar{\text{J}}\,\bar{t}_i^{\,k}\,\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}.$$

Nei punti esterni alla materia, (dove $\text{G}_{ik} = 0$), esso si riduce al:

$$\bar{\text{J}}\,\bar{t}_i^{\,k}\,\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}.$$

(1) Le identità contratte del Bianchi possono ricavarsi dallo stesso principio variazionale che dà luogo alle equazioni di puro campo: $\text{G}_{ik} = 0$, imponendo che le variazioni del tensore fondamentale provengano da una variazione infinitesima delle coordinate. Esse si possono ottenere sotto le due forme $\text{G}_i^{\,k}{}_{/k} \equiv 0$ o $\Theta_i^{\,k}{}_{,k} \equiv 0$. La prima forma risulta di natura tensoriale, la seconda no, pur valendo in qualunque riferimento. In ambedue le forme costituiscono quattro identità intercedenti tra le equazioni di campo.

(2) Il superpotenziale (4b) è quello proposto da MÖLLER nella citata Nota [4].

3. ESPRESSIONE ESPLICITA DEL SUPERPOTENZIALE (6) E DEL SISTEMA (7). – Se la trasformazione di coordinate è lineare, i cofficienti $\partial x^r/\partial \bar{x}^k$ sono delle costanti, ed il superpotenziale (6), come il sistema (7), risultano delle combinazioni lineari, a coefficienti costanti, del superpotenziale di Freud e del sistema canonico Θ_i^k, calcolati nel riferimento x: potranno quindi esprimersi mediante elementi intrinseci (tensore fondamentale e sue derivate ordinarie) dello spazio–tempo considerato.

In generale, per esplicitare sia il superpotenziale (6) che il relativo oggetto (7), si dovranno introdurre altri elementi, oltre a quelli intrinseci della varietà: logica conseguenza del fatto che $\overline{\Theta}_i^k$ e $\overline{\mathfrak{U}}_i^{kl}$ si comportano come tensori soltanto per trasformazioni lineari.

Definisco allora, nel riferimento $\bar{x}$, quattro vettori $\underset{(i)}{\boldsymbol{s}}$, mediante le loro componenti controvarianti: $\underset{(i)}{\bar{s}^j} = \delta_i^j$; nel riferimento x si avrà:

$$\underset{(i)}{s^j} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}. \tag{8}$$

Per le identità:

$$\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^t} = \delta_t^j \qquad \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^t} = \delta_t^j$$

le componenti controvarianti dei quattro vettori $\underset{(i)}{\boldsymbol{s}}$ sopra definiti, risultano le reciproche delle componenti covarianti dei gradienti delle quattro funzioni: $\overset{(j)}{\varphi} = \bar{x}^j\,(x^t)$:

$$\underset{(i)}{s^j}\,\overset{(i)}{\varphi}_{/t} = \delta_t^j \qquad \overset{(j)}{\varphi}_{/i}\,\underset{(t)}{s^i} = \delta_t^j. \tag{9}$$

Mediante questi due sistemi semplici di vettori e funzioni legati dalle (9), si può esplicitare il superpotenziale col relativo sistema conservativo, definiti al paragrafo precedente.

Posto infatti:

$$w^s = \underset{(i)}{s^k}{}_{/k}\,\overset{(i)}{\varphi}{}^{/s} + \overset{(i)}{\varphi}{}^{/k}{}_{k}\,\underset{(i)}{s^s} \tag{10}$$

la (6) assume la semplice espressione:

$$\underset{(i)}{\mathfrak{V}^{rs}} = \sqrt{-g}\left(\underset{(i)}{s^r}\,w^s - \underset{(i)}{s^s}\,w^r\right) - \sqrt{-g}\left(\underset{(i)}{s^{r/s}} - \underset{(i)}{s^{s/r}}\right). \tag{6'}$$

Il superpotenziale proposto risulta cioè somma di una quaterna di densità tensoriali semplici e di una irrotazionale.

Il sistema di vettori (7) risulta poi:

$$\begin{aligned}\underset{(i)}{\mathfrak{T}^r} = \mathfrak{G}_j^r\,\underset{(i)}{s^j} + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(\underset{(i)}{s^j}{}_{/j}\,g^{ls} - \underset{(i)}{s^{l/s}} - \underset{(i)}{s^{s/l}}\right)\left(\underset{(q)}{s^t}{}_{/t}\,\delta_l^r - \underset{(q)}{s^r}{}_{/l}\right)\overset{(q)}{\varphi}_{/s} - \\ - \sqrt{-g}\,\overset{(t)}{\varphi}_{/sp}\left(g^{sp}\,\underset{(t)}{s^j}{}_{/j} - \underset{(t)}{s^{p/s}}\right)\underset{(i)}{s^r}.\end{aligned} \tag{7'}$$

In corrispondenza ad ogni quaterna di vettori $\underset{(i)}{\boldsymbol{s}}$, linearmente indipendenti, che caratterizzano un sistema $\bar{x}$, potrà quindi costruirsi il relativo superpotenziale, mediante la (6'). Il legame tra due superpotenziali costruiti con due diverse quaterne di vettori $\underset{(i)}{\boldsymbol{s}}$ e $\underset{(i)}{\boldsymbol{v}}$, sarà del tutto analogo al legame tra due superpotenziali di Freud, in due diversi sistemi di riferimento: cioè lineare, non omogeneo. Risulterà omogeneo solo quando, scomposti i quattro vettori $\underset{(i)}{\boldsymbol{s}}$ secondo i vettori $\underset{(i)}{\boldsymbol{v}}$ (o viceversa):

$$\underset{(i)}{\boldsymbol{s}} = \underset{(i)}{\lambda^j}\, \underset{(j)}{\boldsymbol{v}} \tag{11}$$

le $\underset{(i)}{\lambda^j}$ saranno costanti.

4. I SUPERPOTENZIALI DI BERGMANN E KOMAR. – Se, valendosi delle formule di trasformazione dei simboli di Christoffel, si esprimono, nella (5), $\bar{t}_i^{\,k}$ e $\overline{\mathfrak{U}}_i^{kl}$ con i loro corrispondenti nel generico sistema x, si arriva alla:

$$\mathfrak{S}_i^{\,k} \underset{(j)}{s^i} + \frac{1}{2}\left[t_i^{\,k} \underset{(j)}{s^i} - \mathfrak{U}_i^{kl} \underset{(j)}{s^i}{}_{,l}\right] = -\frac{1}{2}\left(\mathfrak{U}_i^{kl} \underset{(j)}{s^i}\right)_{,l} . \tag{12}$$

Per ogni indice ordinale j, questa è l'identità del Bergmann [5], che ha quindi proposto come superpotenziale:

$$_{\mathrm{B}}\mathfrak{U}^{kl} = \mathfrak{U}_i^{kl} s^i .$$

Il superpotenziale proposto da Komar [6]:

$$_{\mathrm{K}}\mathfrak{U}^{kl} = \sqrt{-g}\left(s^{k/l} - s^{l/k}\right). \tag{13}$$

che, nel riferimento $\bar{x}$ coincide col (4 b) del Möller, risulta invece, per ogni indice i, la sola parte irrotazionale del superpotenziale (6).

Il (13) proviene dalla seguente identità, stabilita dallo stesso Komar, per la definizione dell'oggetto conservativo:

$$\mathfrak{S}_j^{r} s^j + \mathfrak{C}^r = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(s^{j/r} - s^{r/j}\right)_{/j} . \tag{14}$$

Confrontando la (14) con la (5'), per la (6') risulta:

$$\underset{(i)}{\mathfrak{C}^r} = \frac{1}{2}\,\bar{\mathrm{J}}\,\bar{t}_i^{\,k}\,\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\left(\underset{(i)}{s^r}\, w^s - \underset{(i)}{s^s}\, w^r\right)_{/s} .$$

L'espressione esplicita di $\mathfrak{C}^r$ che non risulta dalla succitata Nota di Komar, come la scomposizione (14), può ottenersi rapidamente mediante le formule di commutazione delle derivate seconde di un vettore:

$$\mathfrak{R}_j^{\,r} s^j = \left[s^p{}_{/p}\, g^{rk} - s^{k/r}\right]_{/k} .$$

Per ogni indice i, quindi, le identità (14) risultano:

$$\mathfrak{G}_j^r \underset{(i)}{s}^j + \frac{1}{2}\mathfrak{R}\underset{(i)}{s}^r - \sqrt{-g}\left[\underset{(i)}{s}^p{}_{/p}\, g^{rk} - \frac{1}{2}\left(\underset{(i)}{s}^{k/r} + \underset{(i)}{s}^{r/k}\right)\right]_{/k} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\left[\underset{(i)}{s}^{k/r} - \underset{(i)}{s}^{r/k}\right]_{/k}$$

dalle quali:

$$\underset{(i)}{\mathfrak{C}}^r = \frac{1}{2}\mathfrak{R}\underset{(i)}{s}^r - \sqrt{-g}\left[\underset{(i)}{s}^p{}_{/p}\, g^{rk} - \frac{1}{2}\left(\underset{(i)}{s}^{k/r} + \underset{(i)}{s}^{r/k}\right)\right]_{/k}.$$

6. TRASFORMAZIONE COMPLETA DI COORDINATE. – Considero ora la formula $(\bar{\text{b}})$, che definisce, nel riferimento $\bar{x}$, il sistema canonico di Einstein; eseguo su di essa una trasformazione *completa* di coordinate, cioè moltiplico la (5) o la equivalente (5′) per $\partial\bar{x}^i/\partial x^q$. Risulta:

$$\mathfrak{G}_q^r + \frac{1}{2}\bar{\mathrm{J}}\,\bar{t}_i^r \frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^q} - \frac{1}{2}\bar{\mathrm{J}}\,\bar{\mathfrak{U}}_i^{kl}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial^2\bar{x}^i}{\partial x^q\,\partial x^s} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^s}\left[\bar{\mathrm{J}}\,\bar{\mathfrak{U}}_i^{kl}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^q}\right].$$

Pongo ora:

$$\mathfrak{S}_q^r = \bar{\mathrm{J}}\,\bar{t}_i^r\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^q} \tag{16}$$

$$\mathfrak{S}_q^{rs} = \bar{\mathrm{J}}\,\bar{\mathfrak{U}}_i^{kl}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^s}{\partial\bar{x}^l}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^q}. \tag{17}$$

Si può quindi scrivere:

$$\mathfrak{G}_q^r + \frac{1}{2}\left[\mathfrak{S}_q^r - \mathfrak{S}_j^{rs}\frac{\partial^2\bar{x}^i}{\partial x^q\,\partial x^s}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^i}\right] = -\frac{1}{2}\mathfrak{S}_q^{rs}{}_{,s}. \tag{18}$$

$\mathfrak{S}_q^{rs}$, definito dalla (17), può quindi considerarsi come un superpotenziale; per la sua stessa definizione, è una densità tensoriale tripla emisimmetrica rispetto agli indici r e s; non risulta invece una densità tensoriale la sua divergenza ordinaria, e nemmeno quindi il corrispondente oggetto:

$$\mathfrak{Q}_q^r = \mathfrak{G}_q^r + \frac{1}{2}\left[\mathfrak{S}_q^r - \mathfrak{S}_j^{rs}\frac{\partial^2\bar{x}^i}{\partial x^q\,\partial x^s}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^i}\right] \tag{19}$$

che soddisfa alle identità di conservazione. Nei punti esterni alla materia, (dove $G_{ik} = 0$), questo si riduce al:

$$\frac{1}{2}\left[\mathfrak{S}_q^r - \mathfrak{S}_j^{rs}\frac{\partial^2\bar{x}^i}{\partial x^q\,\partial x^s}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^i}\right]. \tag{19′}$$

L'espressione esplicita del superpotenziale $\mathfrak{S}_q^{rs}$ risulta immediata dalla definizione (17), per la (6):

$$\mathfrak{S}_q^{rs} = \underset{(i)}{\mathfrak{V}}^{rs}\,\overset{(i)}{\varphi}_{/q} \qquad \underset{(i)}{\mathfrak{V}}^{rs} = \mathfrak{S}_q^{rs}\underset{(i)}{s}^q \tag{20}$$

cioè, per la (6′):

$$\mathfrak{S}_q^{rs} = \sqrt{-g}\left[\delta_q^r w^s - \delta_q^s w^r\right] - \sqrt{-g}\left[\underset{(i)}{s}^{r/s} - \underset{(i)}{s}^{s/r}\right]\overset{(i)}{\varphi}_{/q}. \tag{17′}$$

In modo analogo si esplicita l'oggetto (19), confrontandolo col (7):

$$(19') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q}_q^r = \underset{(i)}{\mathcal{T}^r} \overset{(i)}{\varphi}_{/q} - \frac{1}{2} \mathcal{G}_j^{rs} \underset{(i)}{s^j} \overset{(i)}{\varphi}_{,qs} \\ \text{oppure:} \\ \mathcal{Q}_q^r = \underset{(i)}{\mathcal{T}^r} \overset{(i)}{\varphi}_{/q} - \frac{1}{2} \underset{(i)}{\mathcal{Y}^{rs}} \overset{(i)}{\varphi}_{,qs} . \end{array} \right.$$

Confrontando la (13) e la (4 b) con la (17'), viene spontaneo proporre come ulteriore superpotenziale, in analogia con quello di Komar e di Möller, la seguente densità tensoriale tripla:

$$(21) \qquad \mathcal{Z}_q^{rs} = -\sqrt{-g} \left[\underset{(i)}{s^{r/s}} - \underset{(i)}{s^{s/r}} \right] \overset{(i)}{\varphi}_{/q} .$$

In definitiva: anche una trasformazione finita di coordinate dà luogo a due superpotenziali, di natura tensoriale; altre considerazioni decideranno della loro utilità e validità per i vari problemi di Relatività.

Malgrado la forma totalmente diversa, il superpotenziale (17) coincide con quello proposto dal Rosen nella sua Nota [8]: qui esso viene espresso mediante il tensore fondamentale e le sue derivate tensoriali, eseguite in uno spazio–tempo pseudoeuclideo, messo in corrispondenza biunivoca con l'Universo incurvato, in modo che le coordinate cartesiane ortogonali del primo coincidano con le coordinate $\bar{x}$ del secondo (3).

Il sistema conservativo del Rosen è ottenuto mediante la divergenza covariante (sempre nello spazio–tempo pseudoeuclideo), del superpotenziale (17) esso risulta quindi una densità tensoriale, e non coincide con l'oggetto (19), ottenuto facendo la divergenza ordinaria dello stesso superpotenziale.

7. OGGETTI « ENERGIA–QUANTITÀ DI MOTO ». – Affinché un oggetto $\mathcal{T}_i^k$ possa essere assunto come rappresentante « energia-quantità di moto », deve avere le seguenti proprietà:

1ª deve soddisfare alle leggi di conservazione locali (a);

2ª per un Universo « chiuso », spazialmente vuoto all'infinito, nel quale si possano usare coordinate $\bar{x}$ asintoticamente cartesiane, le seguenti quantità, calcolate nel riferimento stesso:

$$(22) \qquad \bar{P}_i = \iiint_{\bar{x}_0 = \text{cost.}} \bar{\mathcal{T}}_i^0 \, d\bar{x}^1 \, d\bar{x}^2 \, d\bar{x}^3$$

devono essere costanti nel tempo ($\bar{x}_0$) e si devono trasformare come le componenti di un vettore libero per una trasformazione lineare di coordinate spazio–

(3) Questo risultato del ROSEN fa parte della sua teoria relativistica bimetrica esposta, per la prima volta, nella sua Nota [7]. Ignorandola, non l'ho richiamata nelle mie due Note Lincee del 1961 e del 1963.

temporali: questo è essenziale per l'interpretazione di $\overline{P}_i$ come vettore « energia–quantità di moto »;

3ª $\mathfrak{T}_0^k$ deve trasformarsi come una densità vettoriale per un gruppo di trasformazioni puramente spaziali. Quest'ultima proprietà è necessaria perché il contenuto energetico di volume finito (spaziale):

$$\text{(23)} \qquad H_V = \iiint_V \overline{\mathfrak{T}}_0^0 \, d\overline{x}^1 \, d\overline{x}^2 \, d\overline{x}^3$$

sia indipendente dalle coordinate (spaziali) usate nella valutazione dell'integrale stesso.

Il sistema canonico (b) di Einstein gode delle proprietà 1ª e 2ª, non della 3ª; ma è interamente costruito col tensore fondamentale e con le sue derivate ordinarie.

L'oggetto di Möller, corrispondente al superpotenziale (4 b) gode delle proprietà 1ª e 3ª; mentre quello definito nella Nota [10] soddisfa tutte le proprietà richieste: quest'ultimo non ha natura tensoriale, è costruito mediante i versori di quattro congruenze ortogonali, quindi, implicitamente, reca la traccia di direzioni privilegiate.

Gli oggetti da me proposti: (7) e (19) recano, per la loro stessa definizione, traccia di un riferimento $\overline{x}$ a priori non definibile. Esso potrà scegliersi, a seconda del problema in esame, mediante una « condizione di coordinate » Nel riferimento $\overline{x}$ di partenza, entrambi coincidono con il sistema canonico di Einstein.

L'oggetto (7):

$$\underset{(i)}{\mathfrak{T}^r} = -\frac{1}{2} \underset{(i)}{\mathfrak{V}^{rs}}{}_{,s}$$

soddisfa:

alla condizione 1ª per la sua stessa definizione; alla 3ª perché $\underset{(0)}{\mathfrak{T}^r}$ è una densità vettoriale e come tale si comporta per una generica trasformazione di coordinate; non alla 2ª: sia $\overline{x}$, il riferimento nel quale vengono definite le (22), lo stesso nel quale coincidono l'oggetto (7) e quello di Einstein: in questo stesso riferimento coincideranno le quantità (22): $\overline{P}_i$ saranno quindi, in entrambi i casi, delle costanti. Ma per una trasformazione lineare di coordinate le (22), calcolate mediante l'oggetto (7), si comporteranno come degli invarianti.

L'oggetto (19):

$$\mathfrak{Q}_i^r = -\frac{1}{2} \mathfrak{S}_i^{rs}{}_{,s}$$

soddisfa invece a tutte e tre le condizioni:

la 1ª per definizione.

la 2ª in quanto, partendo dal solito riferimento $\overline{x}$, nel quale coincide col sistema canonico di Einstein, ha le stesse caratteristiche del sistema stesso per trasformazioni lineari di coordinate;

la 3ª in quanto, per trasformazioni puramente spaziali ($\bar{x}_0 = x_0$), $\mathfrak{S}_0^{rs}$ si comporta come una densità emisimmetrica tensoriale, quindi $\mathfrak{S}_0^{rs}{}_{,s}$ come una densità vettoriale.

L'oggetto infine corrisponde al superpotenziale (21) presenta le stesse caratteristiche di quello corrispondente al superpotenziale (4 b) del Möller.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. EINSTEIN, « Berl. Ber. », 778 (1915).
[2] P. FREUD, « Ann. Math. », *40*, 417 (1939).
[3] LANDAU and LIFSHITZ, *The classical Theory of Fields*, Addison-Wesley (1959).
[4] C. MÖLLER, « Annals of Physik », *4*, 347 (1958).
[5] G. BERGMANN, « Phys. Rev. », *112*, 287 (1958).
[6] A. KOMAR, « Phys. Rev. », *113*, 934 (1959).
[7] N. ROSEN, « Phys. Rev. », *57*, 150 (1940).
[8] N. ROSEN, « Ann. Phys. », *22*, 1 (1963).
[9] N. ROSEN, *Atti del Convegni sulla Relatività generale* (*Firenze*), 47 (1964).
[10] C. MÖLLER, « Kgl. Danske Vid. Sels. Mat. Fis. Skr. », *1* nº 10 (1961).
[11] C. MÖLLER, « Kgl. Danske Vid. Sels. Mat. Fis. Med. » *34*, nº 3 (1964).