Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

G. Krall

Sul problema centrale della dinamica dei ponti. Nota III. Moto di una distribuzione di carichi inerti e pesanti su di una piastra elastica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.1-2, p. 3–10.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_1-2_3_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1965 (Luglio–Agosto)

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data di arrivo o di presentazione).

Meccanica. — *Sul problema centrale della dinamica dei ponti.* – Nota III. *Moto di una distribuzione di carichi inerti e pesanti su di una piastra elastica.* Nota (*) del Socio G. KRALL.

Sia $p = p(xy, t)$ un flusso di carico, con velocità di componenti U , V riferite ad assi x , y nel piano mediano Π di un piastra elastica. Praticamente una tale condizione di carico può esser del tipo

$$p(xy, t) = p(x - \mathrm{U}t, y - \mathrm{V}t), \tag{1}$$

oppure, con riguardo ad un flusso stazionario, $p = p(xy)$ o più semplicemente p=cost. su tutto o parte del campo. È facile dare l'equazione del moto trasversale della piastra, moto che si penserà caratterizzato, al solito, dalle elongazioni $w = w(xy, t)$ misurate da Π.

Poiché serve, per quanto segue, mettersi in condizioni generali quanto possibile ammettiamo [1] che in Π agisca una distribuzione piana di sforzi n_{xx} , n_{xy} , n_{yy}, corrispondenti ad una configurazione di equilibrio piano, quindi derivabili da una funzione di Airy, biarmonica nel campo S che si considera, secondo le relazioni note

$$n_{xx} = \frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial y^2} \quad , \quad n_{xy} = -\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial x\, \partial y} \quad , \quad n_{yy} = \frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial x^2} \tag{2}$$

(*) Presentata nella seduta del 12 dicembre 1964.

conseguenti alle relazioni, non meno note, $n_{xy} = n_{yx}$ e

$$(2\,a) \qquad \frac{\partial n_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial n_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 n_{xx}}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 n_{xy}}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 n_{yy}}{\partial y^2} = 0 .$$

Allora, considerato l'operatore lineare

$$(3) \qquad \mathfrak{L}(\;) = n_{xx}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\,n_{xy}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + n_{yy}\frac{\partial^2}{\partial y^2} ,$$

ed il laplaciano doppio

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

l'equazione in w si scrive, in condizioni statiche,

$$(4) \qquad \mathrm{B}\Delta\Delta w = q\,(xy) - \lambda\mathfrak{L}\,(w),$$

con $n_{xx}\,, n_{yy} > 0$ sforzi di compressione come, all'uso tecnico, in op. cit. in [3]; non in [1], [2] dove $n > 0$, all'uso classico, indica trazione ed è cambiato quindi il segno al termine $\lambda\mathfrak{L}(w)$. Quanto agli altri simboli, $q = q(xy)$ è la distribuzione statica di carico, B la constante flessorigidezza, λ un moltiplicatore della distribuzione (2). Le condizioni al contorno dello *snodo* o dell'*incastro* non involgono gli sforzi $n_{xx}\,, n_{xy}\,, n_{yy}$, siccome avviene invece se il bordo è libero. Tutte le condizioni possibili risultano da un principio variazionale di cui diremo.

Rileviamo però, sin da ora, che, se è,

$$(5) \qquad n_{xx}\,n_{yy} - n_{xy}^2 > 0$$

in tutto S, cioè se la *conica degli sforzi* relativa ad ogni punto P di S è una ellisse, esiste una infinità di valori, *autovalori*, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$; reali e positivi per $n_{xx} > 0$, con che anche $n_{yy} > 0$ per la (5) è sforzo di compressione, ordinabili in serie crescente, per cui si hanno soluzioni non nulle per $q = 0$. Tali autovalori diconsi *moltiplicatori critici* della distribuzione piana di sforzi. Essi hanno importanza notevolissima; il primo λ_1 in particolare, è il cosiddetto moltiplicatore critico λ_{cr}.

Passando al caso dinamico, sostituendo a q statico una $p\,(xy\,,t)$ funzione anche del tempo t, detta μ_0 la distribuzione delle masse fisse, cioè solidali con la piastra, la (4) diviene, sostituendo alle forze le *forze perdute*,

$$(4\,a) \qquad \mathrm{B}\Delta\Delta\, w + \lambda\mathfrak{L}(w) = p\,(xy\;,t) - \mu_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} .$$

Se p è del tipo precisato e deriva, come avviene in generale, da masse pesanti (mobili), allora occorre considerarne la distribuzione di masse $\mu = p : g$, mobili con velocità, ammettiamo, di componenti *costanti* U , V. In tal guisa a p va sostituita la distribuzione di *forze perdute*, d/dt designando [2] derivata totale e non parziale $\partial/\partial t$ rispetto a t,

$$p - \mu\,\frac{d^2 w}{dt^2} .$$

L'equazione in w si scrive allora, se $q = q(xy)$ indica una distribuzione di carico normale a Π in S, e B è la flessorigidezza, λ un moltiplicatore della distribuzione (2), $\mu_0 = q : g$, per w contato dalla configurazione corrispondente a $q = q(xy)$,

$$(4\,b) \qquad B\Delta\Delta w + \lambda \mathfrak{L}(w) + \mu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(xy) \cdot$$

$$\cdot \left\{ 1 - \frac{1}{g} \left[U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2UV \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2U \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial t} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial y \, \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \right\} .$$

Questa equazione si semplifica sensibilmente se p è costante in tutto S pur mantenendo la mobilità uniforme (caso di flusso indefinito di masse, $\mu = \text{cost.}$ per unità di superficie, con velocità di componenti costanti U, V). Infatti, se si introduce la distribuzione piana di sforzi *costanti*

$$\tilde{n}_{xx} = \mu U^2 \quad , \quad \tilde{n}_{xy} = \mu U \cdot V \quad , \quad \tilde{n}_{yy} = \mu V^2$$

per la quale sussistono ovviamente le (2), (2 *a*), essendo però

$$(5\,a) \qquad \tilde{n}_{xx} \tilde{n}_{yy} - \tilde{n}_{xy}^2 = 0,$$

la sovrapposizione con le n_{xx}, n_{xy}, n_{yy} preesistenti dà luogo ad una n^*

$$(6) \qquad \overset{*}{n}_{xx} = n_{xx} + \tilde{n}_{xx} \quad , \quad \overset{*}{n}_{xy} = n_{xy} + \tilde{n}_{xy} \quad , \quad \overset{*}{n}_{yy} = n_{yy} + \tilde{n}_{yy}$$

per cui, se è $n_{xx} n_{yy} - n_{xy}^2 > 0$, e $n_{xx} > 0$, è *anche*

$$(5\,b) \qquad \overset{*}{n}_{xx} \overset{*}{n}_{yy} - \overset{*}{n}{}_{xy}^{2} > 0 .$$

Introducendo allora l'operatore

$$(3\,a) \qquad \mathfrak{L}^*(\;) = \overset{*}{n}_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\, \overset{*}{n}_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} + \overset{*}{n}_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

la (4*b*) diviene, ove il moltiplicatore λ si applichi ad U^2, UV, V^2,

$$(4\,b) \quad B\Delta\Delta w + \lambda \mathfrak{L}^*(w) + \mu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{g} \left(2\tilde{U} \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial t} + 2\tilde{V} \frac{\partial^2 w}{\partial y \, \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right\}$$

con

$$\tilde{U} = \sqrt{\lambda}\, U \quad , \quad \tilde{V} = \sqrt{\lambda}\, V.$$

DEDUZIONE DELLA (4 *b*) DA UN PRINCIPIO DELL'HAMILTON.

Merita rilevare, anche in riguardo alla sua integrazione, che la (4 *b*) si deduce da un principio variazionale secondo Hamilton.

Precisamente, per semplice generalizzazione di quanto detto nella Nota II, l'*energia elastica* P è data, secondo una celebre formula di Kirchhoff, da

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathrm{S}} \mathrm{B}\left[\left(\frac{1}{\rho_1}\right)^2 + \frac{2\nu}{\rho_1\rho_2} + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^2\right] dx\,dy \tag{7}$$

essendo $1/\rho_1$, $1/\rho_2$ le *curvature principali*, B la flessorigidezza, ν il coefficiente di contrazione di Poisson, in ogni caso < 1. La forma quadratica in $1/\rho_1$, $1/\rho_2$ tra [ ] è quindi in ogni caso *definita positiva*.

L'*energia cinetica* T, somma della T_1 della piastra, T_2 delle masse mobili che partecipano al moto oscillatorio, è

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 \tag{8}$$

con

$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathrm{S}} \mu_0\,\dot{w}^2\,d\mathrm{S} \quad , \quad \mathrm{T}_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathrm{S}} \mu\,(\sqrt{\lambda}\,\mathrm{U}w_x + \sqrt{\lambda}\,\mathrm{V}w_y + \dot{w})^2\,d\mathrm{S}.$$

Il *lavoro di 2° ordine* della distribuzione n_{xx}, n_{xy}, n_{yy}, dianzi definita come sovrapposizione eventuale alla cinetica $\tilde{n}_{xx}$, $\tilde{n}_{xy}$, $\tilde{n}_{yy}$, già considerata in T_2, è

$$\mathfrak{L}_2^* = \frac{\lambda}{2}\int\limits_{\mathrm{S}} (n_{xx}\,w_x^2 + 2\,n_{xy}\,w_x w_y + n_{yy}\,w_y^2)\,d\mathrm{S}\ ; \tag{9}$$

infine, il *lavoro dei carichi* p è

$$\mathfrak{L}_p = -\int\limits_{\mathrm{S}} p w\,d\mathrm{S}. \tag{10}$$

Dal principio dell'Hamilton,

$$\delta\int\limits_0^t \mathfrak{L}\,dt = 0\,, \qquad \text{con} \quad \mathfrak{L} = \mathrm{T} - \mathrm{P} + \mathfrak{L}_2^* - \mathfrak{L}_p\,,$$

seguono la $(4\,b)$ e, con qualche attenzione, le condizioni al contorno s di S, con $\mathrm{B} = 1$ per semplicità,

$$\left\{\frac{\partial\Delta w}{\partial n} + (1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\left[\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right] + \right.$$
$$+ \lambda\left[n_{xx}^*\frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta + n_{xy}^*\left(\frac{\partial w}{\partial y}\cos\theta + \frac{\partial w}{\partial x}\sin\theta\right) + n_{yy}^*\frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta\right] +$$
$$\left. + \mu(\tilde{\mathrm{U}}\dot{w}\cos\theta + \tilde{\mathrm{V}}\dot{w}\sin\theta)\sqrt{\lambda}\right\}\delta w + \left[\nu\Delta w + (1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\right]\frac{\partial\delta w}{\partial n} = 0. \tag{4 a)'}$$

Da qui, per la piastra

a) *semplicemente appoggiata* al contorno s,

$$w = 0 \quad , \quad \nu\Delta w + (1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0; \tag{4 a)''}$$

b) *incastrata* al contorno

$$(4\,a)''' \qquad w = 0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 .$$

Per il bordo libero le condizioni sono più complicate in quanto si debbono annullare proprio le $\{\,\}$ a fattore di δw e di $\partial \delta w / \partial n$. Ma di questo caso tipico della piastra volante per ora non si tratta.

Ciò posto, riprendiamo la (4 *b*) limitatamente al caso stazionario, cioè al caso in cui t non interviene esplicito.

Si ha l'equazione, di cui l'espressione omogenea

$$(4\,c) \qquad B\Delta\Delta w + \lambda \mathfrak{L}^*(w) = 0$$

si identifica con l'equazione della piastra soggetta ad una distribuzione generale di sforzi piani.

Per calcolare il moltiplicatore critico λ_{cr} estendiamo un procedimento già indicato da Timoshenko [3] per il caso $n_{xy} \neq 0$ in cui sono però nulli n_{xx}, n_{yy}.

Con riferimento al principio variazionale di cui la (4 *c*) è l'euleriana, limitando anche l'espressione del potenziale elastico al solo termine $B\,(\Delta w)^2$ come è legittimo se le condizioni agli estremi sono quelle dell'incastro o quelle cui ci si riferisce, $w = 0$ e con sufficiente approssimazione $w'' = 0$ sui lati a e b di un contorno rettangolo;

$$(10) \qquad \Phi = \int_S B\,(\Delta w)^2\, dS - \lambda \int_S \left\{ n^*_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2\, n^*_{xy} \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + n^*_{yy} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right\} dS$$

poniamo

$$w = \sum_{mn} a_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

a_{mn} essendo coefficienti a priori incogniti.

Otteniamo

$$(10\,a) \qquad \Phi = B \frac{\pi^4 ab}{4} \sum_{mn} \left\{ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right\}^2 a^2_{mn} - \frac{\pi^2 ab}{4} \lambda \sum_{mn} \left\{ n^*_{xx} \left(\frac{m}{a}\right)^2 + n^*_{yy} \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right\} \cdot a^2_{mn} + $$
$$ + 8\,\lambda n^*_{xy} \sum_{mn\,pq}{}^{*} \frac{mn\,pq}{(m^2 - p^2)\,(n^2 - q^2)}\, a_{mn}\, a_{pq} ,$$

l' * stando ad indicare che il sommatorio opera sui soli termini per cui $m \pm p$, $n \pm q$ sono numeri dispari.

Con le posizioni

$$(11) \qquad \frac{a}{b} = \beta \quad , \quad \nu = \frac{n^*_{yv}}{n^*_{xx}} \quad , \quad \varkappa = \frac{\pi^2}{32\,\beta} \frac{\pi^3\, B}{b^2\, \lambda n^*_{xy}} \quad , \quad \tau = \frac{\pi^2}{32\,\beta} \frac{n^*_{xx}}{n^*_{xy}} ;$$

e, per $n_{xx} = n_{xy} = n_{yy} = 0$,

$$(11\,a) \qquad \nu = \frac{V^2}{U^2} \quad , \quad \varkappa = \frac{\pi^2}{32\,\beta} \frac{\pi^2}{b^2} \frac{B}{\mu\lambda UV} ,$$

le condizioni di estremo sono

$$(12) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial a_{mn}} = 0 .$$

Con riferimento ai primi sette coefficienti a_{mn}: a_{11}, a_{22}, a_{13}, a_{31}, a_{33}, a_{42}, a_{24}; per i quali $m+n$ risulta *pari*, si ha il sistema, di cui compendiosamente indichiamo il solo discriminante $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\varkappa)$ che va posto $= 0$,

(12 *a*)

	a_{11}	a_{22}	a_{13}	a_{31}	a_{33}	a_{42}	a_{24}
a_{11}	$\frac{\varkappa(1+\beta^2)^2}{\beta^2} - \tau(1+\nu\beta^2)$	$\frac{4}{9}$	0	0	0	$\frac{8}{45}$	$\frac{8}{45}$
a_{22}	$\frac{4}{9}$	$\frac{16\varkappa(1+\beta^2)^2}{\beta^2} - 4\tau(1+\nu\beta^2)$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{36}{25}$	0	0
a_{13}	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{(\varkappa(1+9\beta^2)^2}{\beta^2} - \tau(1+9\nu\beta^2)$	0	0	$-\frac{24}{75}$	$\frac{24}{21}$
a_{31}	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{\varkappa(9+\beta^2)^2}{\beta^2} - \tau(9+\nu\beta^2)$	0	$\frac{24}{21}$	$-\frac{8}{25}$
a_{33}	0	$\frac{36}{25}$	0	0	$\frac{\varkappa(9+9\beta^2)^2}{\beta^2} - \tau(9+9\nu\beta^2)$	$-\frac{72}{35}$	$-\frac{72}{35}$
a_{42}	$\frac{8}{45}$	0	$-\frac{24}{75}$	$\frac{24}{21}$	$-\frac{72}{35}$	$\frac{\varkappa(16+4\beta^2)^2}{\beta^2} - \varkappa(16+4\nu\beta^2)$	0
a_{24}	$\frac{8}{45}$	0	$\frac{24}{21}$	$-\frac{8}{25}$	$-\frac{72}{35}$	0	$\varkappa(4+16\beta^2)^2 - 4\tau(1+4\nu\beta^2)$

Questa equazione in $\varkappa$ è perciò in λ, fornisce con la radice più piccola λ_{cr} il moltiplicatore λ_{cr} di n^* per cui si ha instabilità; $\sqrt{\lambda_{cr}}\,V$, $\sqrt{\lambda_{cr}}\,U$ sono le velocità critiche. Naturalmente il moltiplicatore λ può applicarsi anche alle sole U^2, V^2; alle sole n_{xx}, n_{xy}, n_{yy} a seconda del problema che si studia.

Ancora, a titolo di controllo, per $U = V = 0$ e $n_{xx} = n_{yy} = 0$, $n_{xy} \neq 0$ si ricade in una notissima espressione di $\mathfrak{D}$ dovuta a Timoshenko. Per la scrittura del sistema per $(m+n)$ *dispari* si può valersi della (18 *a*) della Nota II.

Una limitazione inferiore del λ_{cr}.

Indipendentemente dalla (12 *a*) che, se vale la (5) con $n^*_{xx} > 0$, dà, in ogni caso, limitazioni superiori per il λ_{cr}, merita calcolarne un limite inferiore di cui è ovvio l'interesse pratico. Supponiamo dunque che si sappiano, come si sa infatti, calcolare i λ_{cr} per i casi in cui, ordinatamente, è diversa da zero una ed una sola, delle componenti n^*_{xx}, n^*_{xy}, n^*_{yy}. Indichiamo, omettendo il deponente *cr*, con λ_x, λ_{xy}, λ_y questi valori. Sarà dunque

$$(13)\qquad \lambda_x = \min.\frac{\int_S B(\Delta w)^2 dS}{\int_S n^*_{xx}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dS}\ ,\quad \lambda_{xy} = \min.\frac{\int_S B(\Delta w)^2 dS}{\int_S n^*_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}dS}\ ,\quad \lambda_y = \min.\frac{\int_S B(\Delta w)^2 dS}{\int_S n^*_{yy}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dS}\ .$$

Orbene, avendosi, equivalente alla (4 *c*), per $n^*_{xx} n^*_{yy} - n^{*2}_{xy} > 0$, $n^*_{xx} > 0$ (e quindi $n^*_{yy} > 0$), e con riguardo alle (2), (2 *a*), (4 *a*)',

$$(14)\qquad \lambda_{cr} = \min.\frac{\int_S B(\Delta w)^2 dS}{\int_S \left\{ n^*_{xx}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2n^*_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + n^*_{yy}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} dS},$$

si avrà la limitazione inferiore alla Southwell,

$$(15)\qquad \lambda_{cr} \geq \frac{1}{\frac{1}{\lambda_x} + \left|\frac{1}{\lambda_{xy}}\right| + \frac{1}{\lambda_y}}\ .$$

Quanto a λ_x, λ_{xy}, λ_y, per cose note, si possono porre nella forma

$$\lambda_x = k_{xx}\cdot\frac{\pi^2 B}{n^*_{xx} b^2}\ ,\quad \lambda_{xy} = k_{xy}\cdot\frac{\pi^2 B}{n^*_{xy} b^2}\ ,\quad \lambda_{yy} = k_{yy}\cdot\frac{\pi^2 B}{n^*_{yy} a^2}$$

con k_{xx}, k_{xy}, k_{yy} coefficienti numerici dipendenti dal rapporto $\beta = a/b$ tra i lati a, b dell'area rettangolare S e dalle condizioni di vincolo su detti lati.

Per il semplice appoggio sui 4 lati, cfr. op. cit. in [3], ricordando per completezza che, con simboli ovvi,

$$\beta = \frac{a}{b}\ ,\quad B = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}\ ,$$

$$k_{xx} = \left(\frac{1}{\beta} + \beta\right)^2 \quad \text{per } \beta \leq 1 \ ;\quad k_{xx} = 4 \quad \text{per } \beta \geq 1,$$

$$k_{xy} = \left(4 + \frac{5{,}34}{\beta^2}\right) \quad \text{per } \beta \leq 1 \ ;\quad k_{xy} = 5{,}34 + \frac{4}{\beta^2} \quad \text{per } \beta \geq 1,$$

$$k_{yy} = 4 \quad \text{per } \beta \leq 1 \ ;\quad k_{xy} = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2 \quad \text{per } \beta \geq 1,$$

attese le (13), si ha da (15),

$$\lambda_{cr} \geq \frac{\pi^2 B}{n_{xx}^* b^2} \frac{1}{\frac{1}{k_{xx}} + \frac{|n_{xy}^*|}{n_{yy}^*} \frac{1}{k_{xy}} + \frac{n_{yy}^*}{n_{xx}^*} \frac{\beta^2}{k_{yy}}} . \tag{15 a}$$

Per $n_{xx} = n_{xy} = n_{yy} = 0$, $U \neq 0$, $V = 0$,

$$\lambda_{cr} \geq \frac{\pi^2 B}{\mu U^2 b^2} \cdot \begin{cases} \left(\frac{1}{\beta} + \beta\right)^2 & \text{per } \beta \leq 1, \\ 4 & \text{per } \beta \geq 1. \end{cases} \tag{15 b}$$

In una Nota prossima sui Principii variazionali della Stabilità dell'equilibrio elastico daremo, per il problema di cui si tratta un grafico sintetico con cui si può considerare ogni plausibile condizione di vincolo sui quattro lati del rettangolo.

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. KRALL, *Sulle configurazioni d'equilibrio instabile d'una piastra elastica sottile*, « Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, tomo IV, pp. 257–278 (1927).

[2] G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, vol. II, cap. XIV, par. 3, Zanichelli, Bologna 1940.

[3] S. TIMOSHENKO, *Theory of elastic stability*, 9.7, pp. 379–381. McGraw-Hill, London-New York 1961.