Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Roberto Magari

## Un teorema di rappresentazione per i $V_\alpha$-spazi

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **39** (1965), n.1-2, p. 37–40.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_1-2_37_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

**Logica matematica.** — *Un teorema di rappresentazione per i* $V_\alpha$*-spazi* (*). Nota (**) di ROBERTO MAGARI, presentata dal Socio B. SEGRE.

PREMESSA. – Nel corso di certi studi su una classe molto generale di calcoli logici (un primo resoconto di questi studi si troverà in un lavoro in corso di pubblicazione, dal titolo *Calcoli generali e spazi* $V_\alpha$), mi è stato utile dimostrare un teorema di rappresentazione per i $V_\alpha$-spazi.

In questa Nota mi propongo di esporre il risultato in questione indipendentemente dal contesto in cui esso all'origine mi si è presentato. L'interesse del teorema, anche se questo non è particolarmente riposto, sta a mio giudizio nel fatto che esso fornisce una generalizzazione dei metodi di M. H. Stone e si presta ad ulteriori ricerche sulla « rappresentazione » di strutture algebriche o topologiche.

« Rappresentare » una struttura algebrica o topologica significa qui associare, ai suoi elementi, degli insiemi e, alle operazioni su tali elementi (nonché agli operatori definiti sui sottoinsiemi dell'insieme degli elementi della struttura), delle opportune operazioni (operatori) « concrete », cioè definite a partire dalle ordinarie operazioni insiemistiche, in modo che la struttura data e quella ad essa associata siano isomorfe.

Mentre il teorema di Stone realizza una rappresentazione (nel senso accennato) per le algebre di Boole, una rappresentazione siffatta è qui realizzata per i $V_\alpha$-spazi (e in particolare, quindi, per gli spazi topologici ordinari). La struttura di $V_\alpha$-spazio è talmente generale che la rappresentazione trovata, pur essendo in sé elementare, può forse fornire un quadro in cui lavorare in vista di teoremi di rappresentazione per vaste classi di strutture (1).

Il lavoro consta di due paragrafi. In 1, si richiama il concetto di $V_\alpha$-spazio e si dànno alcune definizioni preliminari, mostrando come si arriva a porre il problema di rappresentazione; in 2, viene dimostrato il teorema. Più ampi ragguagli e diversi complementi si troveranno nel lavoro sui calcoli generali.

1\. Ricordiamo che, nella classificazione dovuta ad A. Appert e Ky Fan [1] si intende per $V_\alpha$-spazio un sistema $\langle M , H \rangle$ in cui:

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R. per l'anno 1964–65.

(**) Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1965.

(1) La cosa è possibile in quanto molte classi di strutture possono essere considerate come sottoclassi della classe dei $V_\alpha$-spazi. Cfr. i casi (*a*), (*b*) nel successivo paragrafo 1.

(1.1) M sia un insieme non vuoto

(1.2) H sia un'applicazione di $\mathcal{P}(M)$ in $\mathcal{P}(M)$ tale che:

$$\left.\begin{array}{ll}(1.21) & H\emptyset = \emptyset \\ (1.22) & X \subseteq HX \\ (1.23) & H^2 = H \\ (1.24) & H(X \cup Y) \supseteq HX\end{array}\right\} \quad (X, Y \in \mathcal{P}(M)).$$

Sono in particolare $V_\alpha$–spazi gli spazi topologici ordinari. Due notevoli esempi di $V_\alpha$–spazi si ottengono con una modificazione inessenziale a partire dai casi seguenti:

(*a*) sia E l'insieme delle espressioni di un calcolo logico e D l'operatore « deduzione » ossia l'operatore che a un qualunque insieme X di espressioni associa l'insieme delle espressioni deducibili da X: è facile verificare che per $\langle E, D\rangle$ valgono le (1) ad eccezione della (1.21).

(*b*) sia M l'insieme degli elementi di una struttura algebrica e K l'operatore che ad un qualunque insieme X di elementi di M associa l'insieme degli elementi della sottostruttura generata da X: è facile verificare che per $\langle M, K\rangle$ valgono le (1) ad eccezione al più della (1.21).

Ad ogni $V_\alpha$–spazio $\langle M, H\rangle$ si può associare un preordine « $\leq$ » su M ponendo:

$$(2) \qquad x \leq y \quad \text{se e solo se} \quad y \in H\{x\} \qquad (x, y \in M).$$

Si dirà che un $V_\alpha$–spazio è *ridotto* se per esso la relazione associata è di ordine parziale. In modo ovvio si può associare, mediante un passaggio al quoziente, ad ogni $V_\alpha$–spazio un unico $V_\alpha$–spazio ridotto.

Consideriamo ora un esempio di $V_\alpha$–spazio particolarmente interessante, perché i suoi elementi sono dei sottoinsiemi di un insieme assegnato, e l'applicazione H è definita a partire da operazioni di carattere insiemistico. Preso dunque un insieme S non vuoto sia $S^*$ un insieme di sottoinsiemi di S con $\emptyset \notin S^*$ e sia P un qualunque sottoinsieme di $S^*$. Sia poi KP il sottoinsieme di $S^*$ formato da quegli elementi di $S^*$ che sono contenuti nell'unione degli elementi di P. In tal modo resta definito al variare di P un operatore su $\mathcal{P}(S^*)$: ebbene, non è difficile vedere che $\langle S^*, K\rangle$ è un $V_\alpha$–spazio ridotto. In esso l'operatore K è definito a partire da operazioni insiemistiche.

Viene ora naturale domandarsi se viceversa ogni $V_\alpha$–spazio ridotto sia isomorfo a uno spazio del tipo ora ottenuto.

La ricerca riesce più agevole (ma ovviamente del tutto equivalente) se si passa alla duale della struttura $\langle S^*, K\rangle$ ora introdotta, formulando il problema secondo lo schema dato dalle seguenti definizioni.

DEF. 1. – *Si dirà $V_\alpha$–spazio concreto duale ogni sistema* $\langle S, S^*, K\rangle$ *in cui:*

(3.1) S *sia un insieme non vuoto e* $S^*$ *sia un sottoinsieme non vuoto di* $\mathcal{P}(S)$ *con* $S \notin S^*$

(3.2) K *sia l'applicazione di* $\mathcal{S}$ (S*) *in sé definita da:*

(3.21) $KP = S^* \cap \mathcal{S}(\bigcap_{p \in P} p)$ (dove $P \subseteq S^*$ e il simbolo $\mathcal{S}(q)$ con $q \subseteq S$ sta per $\{r : r \subseteq S, r \supseteq q\}$)[2].

DEF. 2. – *Si dirà astratto di un* $V_\alpha$*–spazio concreto duale* $\mathfrak{S} = \langle S, S^*, K\rangle$ *il sistema* $\langle S^*, K\rangle$ (*che risulta un* $V_\alpha$*–spazio ridotto*).

DEF. 3. – *Si dirà che un* $V_\alpha$*–spazio* $\langle M, H\rangle$ *è rappresentabile su un* $V_\alpha$*–spazio concreto duale* $\mathfrak{S} = \langle S, S^*, K\rangle$ *se esiste un isomorfismo di* $\langle M, H\rangle$ *sull'astratto di* $\mathfrak{S}$ (*ossia un'applicazione biunivoca* $\varphi$ *di* M *su* S* *tale che* $\varphi(HX) = K\varphi(X)$ *per ogni* $X \subseteq M$). *Un* $V_\alpha$*–spazio si dirà rappresentabile se è rappresentabile su almeno un* $V_\alpha$*–spazio concreto duale.*

Com'è facile controllare, il menzionato teorema di Stone ci assicura che sono rappresentabili quei particolari $V_\alpha$–spazi ottenuti da un'algebra di Boole B nel modo seguente.

Sia 1 l'elemento massimo di B e si ponga $B' = B - \{1\}$. Sia poi $\bar{H}$ l'operatore su $\mathcal{S}$(B) che ad ogni $X \subseteq B$ associa il filtro generato da X, e H l'operatore su $\mathcal{S}$(B') definito da:

$$HX = \bar{H}X - \{1\}. \tag{4}$$

Si vede facilmente che $\langle B', H\rangle$ è proprio un $V_\alpha$–spazio e la nota rappresentazione dell'algebra B mediante il suo spazio duale fornisce appunto una rappresentazione di questi particolari spazi $\langle B', H\rangle$ come $V_\alpha$–spazi concreti duali.

Nel paragrafo successivo si dimostrerà in generale che *ogni* $V_\alpha$–spazio ridotto è rappresentabile.

2. Sia $\mathfrak{S} = \langle M, H\rangle$ un $V_\alpha$–spazio ridotto e sia S *l'insieme dei suoi chiusi.* Si noti che $\emptyset \in S$ e si ponga $S' = S - \{\emptyset\}$.

Sia poi $\varphi$ l'applicazione di M in $\mathcal{S}$(S) definita dalla:

$$\varphi x = \{X : X \in S, x \in X\} \qquad (x \in M) \tag{5}$$

e si ponga $S^* = \varphi(M)$.

Ovviamente per ogni $x \in M$ si ha:

$$\emptyset \notin \varphi x \quad \text{da cui} \quad \varphi x = \{X : X \in S', x \in X\} \tag{6}$$

e anche:

$$S \notin S^*; \tag{7}$$

perciò da $\langle S, S^*\rangle$ si ottiene un (unico) $V_\alpha$–spazio concreto duale $\langle S, S^*, K\rangle$.

Ciò premesso, vale il seguente:

TEOREMA. – *La* $\varphi$ *è una rappresentazione di* $\mathfrak{S}$ *su* $\bar{\mathfrak{S}} = \langle S, S^*, K\rangle$ (*cioè, ricordo, un isomorfismo di* $\mathfrak{S}$ *sull'astratto* $\langle S^*, K\rangle$ *di* $\bar{\mathfrak{S}}$).

(2) Il simbolo è stato scelto in vista del fatto che $\mathcal{S}(q)$ viene ad essere, in un certo senso, il duale di $\mathcal{S}(q)$.

*Dimostrazione.* – Proviamo anzitutto che la $\varphi$ è biunivoca. Siano $x$, $y$ due elementi di M e si abbia $\varphi x = \varphi y$. H $\{x\}$ è certo un chiuso cui $x$ appartiene, quindi H $\{x\} \in \varphi x = \varphi y$ e perciò $y \in$ H $\{x\}$. Analogamente si dimostra che $x \in$ H $\{y\}$ onde ciascuno dei due punti appartiene alla chiusura dell'altro ed essendo $\mathcal{S}$ ridotto ne segue $x = y$. La $\varphi$ è dunque biunivoca. Si può controllare anche direttamente che si tratta di un isomorfismo di $\langle M, \leq \rangle$ su $\langle S^*, \subseteq \rangle$.

Rimane da dimostrare che:

$$\varphi(HX) = K\varphi(X) \qquad (X \subseteq M). \tag{8}$$

Si ha:

$$K\varphi(X) = S^* \cap \mathcal{S}\left(\bigcap_{p \in \varphi(X)} p\right) = S^* \cap \mathcal{S}\left(\bigcap_{x \in X} \varphi x\right) = \varphi(M) \cap \{p : p \subseteq S, p \supseteq \bigcap_{x \in X} \varphi x\} =$$

$$= \{p : p \in \varphi(M), p \supseteq \bigcap_{x \in X} \varphi x\} = \{\varphi y : y \in M, \varphi y \supseteq \bigcap_{x \in X} \varphi x\} =$$

$$= \{\varphi y : y \in M, \{Y : Y \in S', y \in Y\} \supseteq \{Z : Z \in S', X \subseteq Z\}\} =$$

$$= \{\varphi y : y \in M, \{Y : Y \in S', y \in Y\} \supseteq \{Z : Z \in S', HX \subseteq Z\}\} =$$

$$= \{\varphi y : y \in M, y \in HX\} = \varphi(HX).$$

Il teorema è così dimostrato. Si osservi che, se si suppone $\langle M, \leq \rangle$ non dotato di massimo, si può nella dimostrazione prendere S′ in luogo di S.

## BIBLIOGRAFIA.


[1] A. APPERT e KY-FAN, *Espaces topologiques intermédiaires*, Paris, Hermann, 1951.

[2] L. HENKIN, *Cylindric algebras* (Lectures presented at the Seminar of the 1961, Can Math. Congress – litografate).

[3] L. HENKIN, *La structure algébrique des théories mathématiques*, Paris 1956.

[4] R. MAGARI e P. MANGANI, *Alcune osservazioni sugli assiomi delle « algebre monadiche » di Halmos*, « Atti Acc. Sci. di Torino », *98* (1963–64).

[5] M. SERVI, *Sulla meno fine topologia ottenuta per estensione da una infratopologia generalizzata*, « Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. di Torino », *23*, 237–248 (1963–64).

[6] M. SERVI, *Sull'estensione degli operatori di tipo* $V_{DD}$, in corso di pubblicazione nei « Rend. Sem. Nat. Univ. e Politec. di Torino.

[7] R. SIKORSKI, *Boolean Algebras*, Berlin, Springer Verlag, 1960.

[8] M. H. STONE, *The theory of representation of Boolean algebras*, « Trans. Am. Math. Soc. », *40*, 37–111 (1936).

[9] A. TARSKI, *Foundations of the calculus of systems* (in *Logic Semantics, Metamathematics*, Oxford, 1956). Trad. a cura di J. H. WOODGER da: *Grundzüge des Systemenkalkul*, Ester Teil, « Fund. Math. », *25*, 503–526 (1935); *Grundzüge der Systemenkalkul*, Zweiter Teil, ibid., *26*, 283–301 (1936).



SUMMARY. — The well known representation theorem by M. H. Stone gives a representation theorem for the "topological" space $V_\alpha$ associated with a Boolean algebra. Here a general representation theorem for $V_\alpha$-spaces is proved.