Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Demetrio Mangeron, L. E. Krivoshein

Valutazione dei moduli delle soluzioni dei problemi al contorno non lineari spettanti ai sistemi polivibranti con rimanenze ed argomenti ritardati

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.1-2, p. 29–36.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_1-2_29_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Analisi matematica. — *Valutazione dei moduli delle soluzioni dei problemi al contorno non lineari spettanti ai sistemi polivibranti con rimanenze ed argomenti ritardati.* Nota (*) di DEMETRIO MANGERON e L. E. KRIVOŠEIN, presentata dal Socio M. PICONE.

1. Il primo degli Autori ha elaborato nel quadro di una teoria unitaria dei problemi al contorno lineari « ben posti » [1] spettanti ai vari tipi di equazioni alle derivate parziali con coefficienti analitici o no alcuni procedimenti che si sono dimostrati assai fecondi nella teoria e nella pratica dei sistemi differenziali oppure integro-differenziali interessanti la Fisica Matematica [2], [3].

Una prima via nell'ordine delle idee di cui sopra consta dell'utilizzazione sistematica della trasformata di Laplace-Picone (1) ad intervallo d'integrazione finito nello studio, collaudato dal plauso dei vari scienziati [4], della unicità, dell'esistenza, della costruzione effettiva e della valutazione delle soluzioni di svariati sistemi funzionali eseguito dall'autore e da alcuni altri pregevoli discepoli [5]-[7] dell'Illustre Accademico Linceo Mauro Picone [8].

La seconda via consta, come lo mostra l'esempio illustrativo concernente l'equazione

$$z\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = h \tag{1}$$

ed il sistema equivalente

$$\begin{Vmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Vmatrix} \tag{2}$$

$$- \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \lambda z & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} e^{-\lambda z} h \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix},$$

$$u_1 = e^{-\lambda x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \quad u_2 = e^{-\lambda x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad , \quad u_3 = e^{-\lambda x}\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{3}$$

nella previa trasformazione dei vari sistemi differenziali considerati nei sistemi corrispondenti al « piano di fase » spettanti agli spazi lineari vettoriali associati alla trasformazione del tipo (3) e nella risoluzione dei sistemi matriciali

(*) Pervenuta all'Accademia il 14 luglio 1965.

(1) Ricordiamo che la trasformazione di Laplace-Picone si definisce, se, ad esempio, ci si ferma al caso di una sola variabile indipendente, tramite la formula

$$\int_0^{T(x)} e^{\lambda [T(x) - t]} u(x, t)\, dt = u^*(x, \lambda). \tag{*}$$

ottenuti coi metodi recentemente elaborati, com'è, ad esempio, il metodo di determinazione delle soluzioni deboli (nel senso di Sobolev) dovuto a K. O. Friedrichs [9], [10].

La terza via sfrutta il seguente teorema stabilito dal primo degli Autori.

TEOREMA 1. – *Siano*

$$(E_q^{m,n}) \left(\frac{\partial^{mn}}{\partial x_1^n \partial x_2^n \cdots \partial x_m^n} + (-1)^{mn} \frac{\partial^{mn}}{\partial y_1^n \partial y_2^n \cdots \partial y_m^n} \right)^{(q)} u = 0 ,$$

$$(H_q^{m,n}) \left(\frac{\partial^{mn}}{\partial x_1^n \partial x_2^n \cdots \partial x_m^n} - (-1)^{nm} \frac{\partial^{mn}}{\partial y_1^n \partial y_2^n \cdots \partial y_m^n} \right)^{(q)} u = 0 ,$$

$$(P_q^{m,n}) \left(\frac{\partial^{mn}}{\partial x_1^n \partial x_2^n \cdots \partial x_m^n} \pm (-1)^{m(n-1)} \frac{\partial^{m(n-1)}}{\partial y_1^{n-1} \partial y_2^{n-1} \cdots \partial y_m^{n-1}} \right)^{(q)} u = 0$$

le equazioni alle derivate parziali corrispondenti agli operatori poliarmonici (M. Picone) [11], *polivibranti* (D. Mangeron) [12] *e policalorici* (M. Nicolescu) [13], *che si riducono per* $q = 1 , n = 2 , m = 1$ *rispettivamente all'equazione del potenziale, delle corde vibranti e della propagazione del calore. Le convoluzioni di seconda specie del tipo di Volterra* [14] *delle due soluzioni qualunque delle equazioni conducono ad una soluzione dell'una delle dette equazioni.*

Ad esempio, siano

$$u_e(x_1 , x_2 , \cdots , x_m ; s_1 , s_2 , \cdots , s_m) \quad \text{ed} \quad v_e(y_1 , y_2 , \cdots , y_m ; s_1 , s_2 , \cdots , s_m)$$

due soluzioni dell'equazione $(E_1^{m,n})$. Allora

$$(4) \qquad u_h(x_1 , x_2 , \cdots , x_m ; y_1 , y_2 , \cdots , y_m) =$$

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{m} u_e(x_1 , x_2 , \cdots , x_m ; s_1 , s_2 , \cdots , s_m) \, v_e(y_1 , y_2 , \cdots , y_m ; s_1 , s_2 , \cdots , s_m) \, ds_1 \, ds_2 \cdots ds_m$$

è una soluzione dell'equazione $(H_1^{m,n})$.

In una serie di studi aventi alla base le loro Note lincee gli Autori hanno studiato, talvolta anche separatamente [15]–[19], vari problemi al contorno lineari e non lineari integro-differenziali con operatori del tipo (E)–(P) e con argomenti ritardati. In ciò che segue si espongono brevemente alcuni risultati spettanti al sistema integro-differenziale con operatori iperbolici ed argomenti ritardati [(2)] [21], [22]

(2) In uno studio di prossima pubblicazione vi sarà esposta una serie di problemi al contorno col calcolo numerico corrispondente relativa all'equazione

$$(**) \qquad \frac{\partial^2 u(x , y)}{\partial x \partial y} = p(y) \frac{\partial u(x , y)}{\partial x} + f(x , y) + \iint_{\mathfrak{D}} \sum_{i+j=0}^{1} \mathcal{K}_{ij}(A , B) \, u_{\alpha_i \beta_j}^{(i+j)} [\alpha_i(t) , \beta_j(\tau)] \, dB ,$$

$$A \equiv (x , y) \quad , \quad B \equiv (t , \tau)$$

come pure alle equazioni polivibranti, contenenti cioè le derivate totali d'ordine superiore nel senso di Picone [20]

$$(***) \qquad D^k u \equiv \frac{\partial^{km} u}{\partial x_1^k \partial x_2^k \cdots \partial x_m^k} \qquad (k = 1 , 2 , \cdots).$$

$$(5) \qquad \mathrm{B}[u] \equiv \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\,\partial y} - p(x)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - \sum_{i+j=0}^{1}\Big\{ r_{ij}(x,y)\,u[\alpha_i(x),\beta_j(y)]$$

$$+\iint_{\mathrm{T}} \mathcal{K}_{ij}(x,y;t,\tau)\,u[\alpha_i(t),\beta_j(\tau)]\,dt\,d\tau\Big\} = f_1\{x,y,u(x,y),u[\alpha_1(x),y],u[x,\beta_1(y)]\}$$

$$+\iint_{\mathrm{T}} \mathcal{K}(x,y;t,\tau)\,f_2\{t,\tau,u(t,\tau),u[\alpha_1(t),\tau],u[t,\beta_1(\tau)]\}\,dt\,d\tau,$$

$$(6) \qquad u(0,y)=\psi_1(y)\ (y\geq 0)\quad,\quad u(x,0)=\psi_2(x)\ (x\geq 0)\quad,\quad \psi_1(0)=\psi_2(0)=0,$$

$$u(x,y)\equiv\begin{cases} 0, & x\leq 0,\ y=0\\ 0, & y\leq 0,\ x=0,\end{cases}$$

ove $r_{ij}(x,y)$, $\mathcal{K}_{ij}(x,y;t,\tau)$ $(0\leq i+j\leq 1)$, $p(x)$, $\mathcal{K}(x,y;t,\tau)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(x)$ sono funzioni continue note per tutti $x, y \in [0,a]$, $y, \tau \in [0,b]$; T [19] e le funzioni α_i e β_j hanno la forma solita di funzioni ad argomento ritardato [23], [24].

2. Hanno luogo i seguenti teoremi.

TEOREMA 2. – *Nell'ipotesi che le funzioni* $f_i(x,y,z_1,z_2,z_3)$ *soddisfano ad esempio, nel dominio* $\mathcal{G}$ [22] *la condizione di Lipschitz rispetto ai loro argomenti* 3°–5°.

$$(7) \qquad |f_i(x,y,w_1,w_2,w_3) - f_i(x,y,v_1,v_2,v_3)| \leq h_i(x,y)\sum_{k=1}^{3}|w_k - v_k|,$$

ove $0\leq h_i(x,y)$ $(i=1,2)$ *sono funzioni note e se ha luogo l'ineguaglianza*

$$(8) \qquad l_0 = 1 - \max_{\mathfrak{D}}\iint_{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{2}|\mathrm{M}_i(x,y;t,\tau)|\,h_i(t,\tau)\,dt\,d\tau > 0, \qquad \mathfrak{D}=[0,a]\times[0,b],$$

il sistema integro–differenziale (5), (6) *possiede una soluzione unica dotata di derivate continue* $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\,\partial y}$, *ottenibile, seguendo il principio di Banach* [25], *dall'equazione integrale*

$$(9) \qquad u(x,y) = \mathrm{F}_1(x,y) + \iint_{\mathrm{T}}\Gamma(x,y;t,\tau)\,\mathrm{F}_1(t,\tau)\,dt\,d\tau \equiv$$

$$\mathrm{F}(x,y) + \iint_{\mathrm{T}}\Big[\mathrm{M}_1(x,y;t,\tau)\,f_1\{t,\tau,u(t,\tau),u[\alpha_1(t),\tau],u[t,\beta_1(\tau)]\}$$

$$+\mathrm{M}_2(x,y;t,\tau)\,f_2\{t,\tau,u(t,\tau),u[\alpha_1(t),\tau],u[t,\beta_1(\tau)]\}\Big]\,dt\,d\tau,$$

ove

$$(10)\quad F_1(x,y) \equiv g(x,y) + \iint_T \Big[\mathcal{K}_1(x,y;t,\tau) f_1\{t,\tau,u(t,\tau),u[\alpha_1(t),\tau],u[t,\beta_1(\tau)]\}$$

$$+ \mathcal{K}_2(x,y;t,\tau) f_2\{t,\tau,u(t,\tau),u[\alpha_1(t),\tau],u[t,\beta_1(\tau)]\}\Big] \, dt\, d\tau ,$$

mentre $\Gamma(x,y;t,\tau)$ *è il nucleo risolvente del nucleo* $P_{00}(x,t;t,\tau) + P_{01}(x,y;t,\tau) + P_{10}(x,y;t,\tau)$ *figurante nell'operatore*

$$(11)\quad R[u] \equiv u(x,y) - \iint_T \sum_{i+j=0}^{1} P_{ij}(x,y;t,\tau)\, u[\alpha_i(t),\beta_j(\tau)]\, dt\, d\tau =$$

$$g(x,y) + \iint_T \Big[\mathcal{K}_1(x,y;t,\tau) f_1\{t,\tau,u(t,\tau),u[\alpha_1(t),\tau],u[t,\beta_1(\tau)]\}$$

$$+ \mathcal{K}_2(x,y;t,\tau) f_2\{t,\tau,u(t,\tau),u[\alpha_1(t),\tau],u[t,\beta_1(\tau)]\}\Big] \, dt\, d\tau .$$

TEOREMA 3. – *Nell'ipotesi che sono soddisfatte le ineguaglianze*

$$(12)\quad \max_{\mathfrak{D}} \big| f_i\{x,y,w(x,y),w[\alpha_1(x),y],w[x,\beta_1(y)]\}$$

$$- f_{ii}\{x,y,w(x,y),w[\alpha_1(x),y],w[x,\beta_1(y)]\}\big| < l_0\, \varepsilon : (2\sigma_i) , \qquad (i = 1, 2),$$

ove si è posto

$$(13)\quad \sigma_i = \max_{\mathfrak{D}} \iint_T |M_i(x,y;t,\tau)|\, dt\, d\tau \qquad (i = 1, 2),$$

la soluzione del problema (5), (6) *è stabile nel senso che si ha*

$$(14)\quad |u(x,y) - w(x,y)| \le \iint_T \Big| M_1(x,y;t,\tau)$$

$$\cdot \Big[f_1\{t,\tau,w(t,\tau),w[\alpha_1(t),\tau],w[t,\beta_1(\tau)]\} - f_{11}\{t,\tau,w(t,\tau),w[\alpha_1(t),\tau],w[t,\beta_1(\tau)]\}\Big]$$

$$+ M_2(x,y,t,\tau)\Big[f_2\{t,\tau,w(t,\tau),w[\alpha_1(t),\tau],w[t,\beta_1(\tau)]\}$$

$$- f_{22}\{t,\tau,w(t,\tau),w[\alpha_1(t),\tau],w[t,\beta_1(\tau)]\}\Big]\Big| \, dt\, d\tau : l_0 ,$$

$$(15)\quad |u(x,y) - w(x,y)| < \varepsilon , \qquad (x,y) \in \mathfrak{D} ,$$

essendovi $w(x,y)$ *data dall'equazione integrale*

$$(16)\quad w(x,y) = F(x,y) + \iint_T \Big\{M_1(x,y;t,\tau) f_{11}\{t,\tau,w(t,\tau),w[\alpha_1(t),\tau]\, w[t,\beta_1(\tau)]\}$$

$$+ M_2(x,y;t,\tau) f_{22}\{t,\tau,w(t,\tau),w[\alpha_1(t),\tau],w[t,\beta_1(\tau)]\}\Big\} \, dt\, d\tau ,$$

ottenuta dal sistema integro-differenziale (6) *e*

$$\text{(17)}\qquad B[w] = f_{11}\{x, y, w(x, y), w[\alpha_1(x), y], w[x, \beta_1(y)]\}$$

$$+ \iint_T \mathcal{K}(x, y; t, \tau) f_{22}\{t, \tau, w(t, \tau), w[\alpha_1(t), \tau], w[t, \beta_1(\tau)]\}\, dt\, d\tau,$$

ove le funzioni $f_{ii}(\cdot)$ $(i = 1, 2)$ *sono certe trasformate delle funzioni* $f_1(\cdot)$ *e* $f_2(\cdot)$.

TEOREMA 4. – *Sia*

$$\text{(18)}\qquad \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x\, \partial y} - p(x) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - \sum_{i+j=0}^{1} \Big\{ r_{ij}(x, y)\, v[\gamma_i(x), \delta_j(y)]$$

$$+ \iint_T \mathcal{K}_{ij}(x, y; t, \tau)\, v[\gamma_i(t), \delta_j(\tau)]\, dt\, d\tau \Big\} = f_1\{x, y, v(x, y), v[\gamma_1(x), y], v[x, \delta_1(y)]\}$$

$$+ \iint_T \mathcal{K}(x, y; t, \tau)\, f_2\{t, \tau, v(t, \tau), v[\gamma_1(t), \tau], v[t, \delta_1(\tau)]\}\, dt\, d\tau$$

l'equazione corrispondente alle perturbazioni degli argomenti ritardati $\alpha_1(x)$ *e* $\beta_1(y)$. *Poiché dalle* (18) *e* (6) *ne segue*

$$\text{(19)}\quad v(x, y) = F(x, y) - \iint_T \Big[\sum_{i+j=0}^{1} A_{ij}(x, y; t, \tau) \{ v[\alpha_i(t), \beta_j(\tau)] - v[\gamma_i(t), \delta_j(\tau)] \}$$

$$- \sum_{i=1}^{2} M_i(x, y; t, \tau) f_i\{t, \tau, v(t, \tau), v[\gamma_1(t), \tau], v[t, \gamma_1(\tau)]\}\, dt\, d\tau,$$

ove si è posto

$$\text{(20)}\qquad A_{ij}(x, y; t, \tau) \equiv \Gamma(x, y; t, \tau)\, r_{ij}(t, \tau),$$

ha luogo l'ineguaglianza

$$\text{(21)}\quad |u(x, y) - v(x, y)| \le \iint_T \Big\{ \sum_{i+j=0}^{1} |A_{ij}(x, y; t, \tau)|\, |v[\alpha_i(t), \beta_j(\tau)] - v[\gamma_i(t), \beta(\tau)]|$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} |M_k(x, y; t, \tau)|\, h_k(t, \tau) \sum_{i+j=0}^{1} \Big[|u[\alpha_i(t), \beta_j(\tau)] - v[\alpha_i(t), \beta_j(\tau)]|$$

$$+ |v[\alpha_i(t), \beta_j(\tau)] - v[\gamma_i(t), \delta_j(\tau)]| \Big] \Big\}\, dt\, d\tau$$

e nelle ipotesi della validità delle (8) *e della* (22) *spettante alla* $v(\alpha, \beta)$,

$$\text{(22)}\qquad |v(\alpha_i, \beta_j) - v(\gamma_i, \delta_j)| \le k\,[|\alpha_i - \gamma_i| + |\beta_j - \delta_j|], \qquad k = \text{const},$$

$$0 \le \alpha_i, \gamma_i \le a \quad , \quad 0 \le \beta_j, \delta_j \le b,$$

quest'altra

$$\max_{\mathfrak{D}} |u(x,y)-v(x,y)| \leq \max_{\mathfrak{D}} k \iint_{T} [|\alpha_1(t)-\gamma_1(t)|+|\beta_1(\tau)-\delta_1(\tau)|]$$
$$\times\left[\sum_{i+j=0}^{1} |A_{ij}(x,y;t,\tau)| + \sum_{i=1}^{2} h_i(t,\tau)\,|M_i(x,y;t,\tau)|\right] dt\, d\tau < \varepsilon, \tag{23}$$

ove si è supposto

$$\max_{\mathfrak{D}} [|\alpha_1(x)-\gamma_1(x)|+|\beta_1(y)-\delta_1(y)|]$$
$$< \varepsilon : \max_{\mathfrak{D}} k \iint_{T}\left[\sum_{i+j=0}^{1} |A_{ij}(x,y;t,\tau)| + \sum_{i=1}^{2} h_i(t,\tau)\,|M_i(x,y;t,\tau)|\right] dt\, d\tau. \tag{24}$$

Nel caso poi in cui le perturbazioni delle funzioni $\alpha_1(x)$ e $\beta_1(y)$ sono tali che $\gamma_1(x) \equiv x$, $\delta_1(y) \equiv y$, l'equazione integro-differenziale (18) rimane priva degli argomenti ritardati e la validità delle condizioni (8), (22), (24) conduce alla vicinanza d'ordine ε delle soluzioni dei problemi (5), (6) e (6), (18) corrispondenti rispettivamente agli argomenti ritardati ed agli argomenti ordinari.

3. Costruiamo adesso in vista alla programmazione per le calcolatrici elettroniche soluzione approssimativa del problema (5), (6). Prendiamo le mosse dall'equazione (11). Per la striscia $0 \leq x \leq x_1$, $0 \leq y \leq y_1$ ($x = x_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$; $y = y_j$ $(j = 1, 2, \cdots, m) \in \mathfrak{D}$) si ottiene

$$u_{11}(x,y) = g(x,y) + \sum_{i+j=0}^{1} \psi_1[\beta_j(y)] \int_0^x\!\!\int_0^y P_{ij}(x,y;t,\tau)\, d\tau\, dt$$
$$+ f_1\left[0, y, \psi_1(y), \psi_1(y), \psi_1[\beta_1(y)]\right] \int_0^x\!\!\int_0^y \mathcal{K}_1(x,y;t,\tau)\, d\tau\, dt$$
$$+ f_2\left[0, y, \psi_1(y), \psi_1(y), \psi_1[\beta_1(y)]\right] \int_0^x\!\!\int_0^y \mathcal{K}_2(x,y;t,\tau)\, d\tau\, dt, \tag{25}$$

mentre per la striscia $0 \leq y \leq y_1$, $x_1 \leq x \leq x_2$ si ha

$$u_{21}(x,y) = g(x,y) + \sum_{i+j=0}^{1} \left\{ \int_0^x\!\!\int_0^y P_{ij}(x,y;t,\tau)\, u_{11}[\alpha_i(t), \beta_j(\tau)]\, d\tau\, dt \right.$$
$$\left. + u_{11}[\alpha_i(x_1), \beta_j(y)] \int_0^x\!\!\int_0^y P_{ij}(x,y;t,\tau)\, d\tau\, dt \right\}$$
$$+ \int_0^{x_1}\!\!\int_0^y \left\{ \mathcal{K}_1(x,y;t,\tau)\, f_1\{t, \tau, u_{11}(t,\tau), u_{11}[\alpha_1(t), \tau], u_{11}(t, \beta_1(\tau))\}\right. \tag{26}$$

$$+ \mathcal{K}_2(x, y; t, \tau) f_2 \{t, \tau, u_{11}(t, \tau), u_{11}[\alpha_1(t), \tau)], u_{11}[t, \beta_1(\tau)]\} \Big\} d\tau\, dt$$

$$+ f_1\{x_1, y, u_{11}(x_1, y), u_{11}[\alpha_1(x_1), y], u_{11}[x_1, \beta_1(y)]\} \int_{x_1}^{x}\int_0^{y} \mathcal{K}_1(x, y; t, \tau)\, d\tau\, dt$$

$$+ f_2\{x_1, y, u_{11}(x_1, y), x_{11}[\alpha_{11}(x_1), y], u_{11}[x_1, \beta_1(y)]\} \int_{x_1}^{x}\int_0^{y} \mathcal{K}_2(x, y; t, \tau)\, d\tau\, dt$$

e così via. All'uopo di valutare l'errore commesso, sia $v_1(x, y)$ soluzione approssimativa de problema (5), (6) corrispondente alla prima striscia. Si ha per conseguenza

$$(27) \quad r_1(x, y) \equiv v_1(x, y) - g(x, y) - \sum_{i+j=0}^{1} \int_0^{x}\int_0^{y} P_{ij}(x, y; t, \tau)\, v_1[\alpha_i(t), \beta_j(\tau)]\, d\tau\, dt$$

$$- \int_0^{x}\int_0^{y} \Big\{ \mathcal{K}_1(x, y; t, \tau) f_1\{t, \tau, v_1(t, \tau), v_1[\alpha_1(t), \tau], v_1[t, \beta_1(\tau)]\}$$

$$+ \mathcal{K}_2(x, y; t, \tau) f_2\{t, \tau, v_1(t, \tau), v_1[\alpha_1(t), \tau], v_1[t, \beta_1(\tau)]\} \Big\} d\tau\, dt$$

e, nell'ipotesi della validità delle condizioni (7) come pure dell'ineguaglianza

$$(28) \quad l_{1n} = 1 - \max_{\mathfrak{D}_1} \int_0^{x}\int_0^{y} \Big\{ \sum_{i+j=0}^{1} |P_{ij}(x, y; t, \tau)| + \sum_{i=1}^{2} |h_i(t, \tau)|\, |\mathcal{K}_i(x, y; t, \tau)| \Big\} d\tau\, dt > 0,$$

tenendo conto delle (7) e (28),

$$(29) \quad \max_{\mathfrak{D}_1} |u(x, y) - v_1(x, y)| \leq \max_{\mathfrak{D}_1} |r_1(x, y)| : l_{1n} = \lambda_{1n},$$

$$(30) \quad |u(x, y) - v_1(x, y)| \leq |r_1(x, y)|$$

$$+ \lambda_{1n} \int_0^{x}\int_0^{y} \Big\{ \sum_{i+j=0}^{1} |P_{ij}(x, y; t, \tau)| + \sum_{i=1}^{2} |\mathcal{K}_i(x, y; t, \tau)|\, h_i(t, \tau) \Big\} d\tau\, dt \qquad (x, y) \in \mathfrak{D}_1.$$

In modo affatto analogo, ma, naturalmente, tramite i calcoli molto più laboriosi, si ottiene la valutazione degli errori commessi spettanti alle striscie successive.

BIBLIOGRAFIA.

[1] D. MANGERON, *Sur quelques problèmes à la frontière qui ne sont pas « bien posés » au sens d'Hadamard.* I, « Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg. », 50 (5), 515–522 (1964).

[2] D. MANGERON, *Théorie unitaire des problèmes au contour de différents types et nouvelles méthodes d'étude de leurs solutions.* Colloque sur la théorie des fonctions convexes, avec applications au calcul numérique. Acad. R.P.R. Institut de Calcul, Cluj, 1–5.VIII. 1965. *Programme des travaux*, p. 10.

[3] D. MANGERON, *Sur une nouvelle classe de problèmes à la frontière.* International Congress of Mathematicians. Abstracts of Short Communications, Stockholm 1962, p. 95.

[4] L. POLI, P. DELERUE, *Le Calcul symbolique à deux variables*. Gauthier-Villars, Paris 1954, pp. 49–50.

[5] D. MANGERON, *L'applicazione del metodo di Picone, della trasformazione di Laplace ad intervallo d'integrazione finito, alla teoria delle equazioni a derivate parziali d'ordine qualunque*, « Rend. R. Accad. d'Italia, Cl. sci. fis., mat. e nat. », ser. VII, I (1), 1–9 (1939).

[6] A. GHIZZETTI, *Problème de Dirichlet et Calcul symbolique*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova » (1948).

[7] S. FAEDO, *Trasformate multiple di Laplace*, « Rend. Accad. d'Italia, Cl. sci. fis., mat. e nat. », ser. VII, III (1) (1941).

[8] *** *Onoranze a Mauro Picone*. La cerimonia del 15 gennaio 1956. A cura del Comitato per le onoranze. Roma 1956.

[9] K. O. FRIEDRICHS, *Symmetric positive linear differential equations*, « Communs Pure and Appl. Math. », *11* (3), 333–418 (1958).

[10] L. GAUTHIER, *Essai d'un traitement unitaire pour les opérateurs de la dynamique*, Colloques Internationaux du C.N.R.S., N° 111, *La propagation des ébranlement dans les milieux hétérogènes*. Marseille, 11–16 Septembre 1961, pp. 79–92.

[11] M. PICONE, Accademia Nazionale dei LX, Roma, Annuario, 1961, pp. 287–311.

[12] D. MANGERON, *Une nouvelle classe de problèmes à la frontière dans la lumière de la théorie des processus optimaux*, « Comunic. Acad. R.P.R. », *13* (12), 1023–1030 (1963).

[13] M. NICOLESCU, *Équation itérée de la chaleur*, « Studii și cercetări de mat. Acad. R. P. R. », *5* (3–4), 243–332 (1954).

[14] V. VOLTERRA, *Opere Matematiche. Memorie e Note*. V, 1962, Accad. Naz. dei Lincei, Roma.

[15] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra una classe dei problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone* (*A Mauro Picone nel suo 75° compleanno*), « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Roma. Cl. sci. fis., mat. e nat. », ser. 8ª, XXXI (1–2), 27–32 (1961).

[16] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sistemi policalorici a rimanenza ed a argomento ritardato. Problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali con operatore calorico ed argomento ritardato* (*Dedicata a Mauro Picone nel suo 80° compleanno*), « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », XXXV, 1–24 (1965).

[17] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Problemi al contorno per una classe di equazioni integro-differenziali non lineari alle derivate totali di Picone* (*Ad Ernesto Pascal in memoriam*), « Rend. Accad. Sci. fis. e mat., Napoli », ser. 4ª, XXXI, 106–129 (1964).

[18] L. E. KRIVOŠEIN, *Približennoe rešenie načal'noi zadaci dlia odnogo klassa integro-differentzial'nyh uravnenii* (*Risoluzione approssimativa del problema ai valori iniziali per una classe di equazioni integro-differenziali*). Programma della Seconda Conferenza Unionale di Matematica computazionale. 22–26 gennaio 1965, Mosca, p. 38.

[19] D. MANGERON, *Introduzione nello studio dei sistemi polivibranti con rimanenza ed argomenti ritardati*. I, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat. », ser. 8ª, (1965) (in stampa).

[20] M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica*, « Ann. Sci. Univ. Jassy », I-e sect., XXVI (1), 183–232 (1940).

[21] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *New methods of numerical calculation of the solutions of various integro-differential systems presenting interest in applied Mechanics*. – I. *Polyvibrating systems*, « Revue Roumaine Sci. techn. Série Méc. appl. », *9* (6), 1195–1222 (1964).

[22] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *New methods of numerical calculation of the solutions of polyvibrating integro-differential equations with retarded arguments*, « Revue Roumaine Sci. techn., Série Méc. appl. », *10* (1965), (in stampa).

[23] L. E. ELSGOLTZ, *Vvedenie v teoriu differentzial'nhy uravnenii s otkloneaiuscimsia argumentom* (*Introduzione nella teoria delle equazioni differenziali coll'argomento ritardato*). « Nauka », Mosca 1964.

[24] R. BELLMAN, *Mathematical optimization techniques*. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1963.

[25] S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*. MTN, Warszawa 1932.