
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

DEMETRIO MANGERON

Introduzione nello studio dei sistemi polivibranti con rimanenza ed argomenti ritardati. Nota I

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 39 (1965), n.1-2, p. 22-28.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_1-2_22_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Introduzione nello studio dei sistemi polivibranti con rimanenza ed argomenti ritardati.* Nota I (*) di DEMETRIO MANGERON, presentata dal Socio M. PICONE.

I. Oramai il classico libro di *Lezioni di Analisi Matematica* dovuto allo Illustre Accademico Linceo Mauro Picone [1] costituisce anche tuttora l'inesauribile sorgente di nuove ricerche. Limitandoci all'ordine di idee di questa Nota, sottolineiamo, ad esempio, la vasta mole di risultati conseguiti dall'autore e continuata poscia in collaborazione col prof. L. E. Krivošein [2]–[5] concernente vari sistemi di equazioni funzionali spettanti alle *funzioni di dominio* [1, cap. IV, § 3, pp. 465–506]. L'attenzione e l'interesse del mondo scientifico è stato destato soprattutto dalla problematica spettante alle equazioni funzionali concernenti le funzioni di dominio «rettangolari», di cui il prototipo è il problema al contorno [6]–[8].

$$(1) \quad [A(x)u' + \lambda B(x)u]' + \lambda [B(x)u' + C(x)u] = 0,$$

$$(2) \quad u|_{\text{FR}} = 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad R = R\{x_i^* \leq x_i \leq x_i^{**}\} \\ (i = 1, 2, \dots, m),$$

posto e risolto anni or sono dall'autore, per la prima volta per le equazioni non ellittici, nella sua Tesi di laurea [9] sostenuta presso una commissione presieduta dal suo amatissimo e venerato Maestro M. Picone, nel primo lustro dalla creazione da Lui impareggiabilmente condotta dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo [10].

La novità del problema (1), (2) consta nel fatto che il dominio «rettangolare» $R\{x_i^* \leq x_i \leq x_i^{**}\}$ è ad m dimensioni, mentre col simbolo u' si è notata la derivata totale prima

$$(3) \quad u' \equiv Du = \frac{\partial^m u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m}$$

nel senso di Picone [11].

Nella sua altamente gradita conferenza tenutasi a Iași nel 1937 [12] il geniale Maestro, pur sottolineando la vasta portata dei risultati conseguiti dall'autore nel dominio delle equazioni alle derivate totali [13]–[15] (1) esemplificava tale portata col seguente teorema fondamentale:

(*) Pervenuta all'Accademia l'8 luglio 1965.

(1) Chiamati dall'autore equazioni con operatori di Picone [4], [5], oppure equazioni polivibranti, e conseguentemente da taluni discepoli ed altri noti scienziati [16], [17] equazioni di Picone-Mangeron.

Ad una funzione f , da definirsi nel cubo Q si possono arbitrariamente assegnare i suoi valori sui vertici del cubo, le sue derivate seconde totali sulle costole, sulle facce e nell'interno del cubo, in seguito a che essa riesce determinata e data dalla formola:

$$\begin{aligned}
 (4) \quad f = & f^{000} (1-x)(1-y)(1-z) + f^{010} (1-x)y(1-z) + f^{001} (1-x)(1-y)z \\
 & + f^{011} (1-x)yz + f^{100} x(1-y)(1-z) + f^{110} xy(1-z) + f^{101} x(1-y)z \\
 & + f^{111} xyz + \sum_{(x,y,z)} \left\{ (1-y)(1-z) \int_0^1 \mathfrak{S}(x, \xi) f_{yz}^{00}(\xi) d\xi \right. \\
 & + y(1-z) \int_0^1 \mathfrak{S}(x, \xi) f_{yz}^{10}(\xi) d\xi + (1-y)z \int_0^1 \mathfrak{S}(x, \xi) f_{yz}^{01}(\xi) d\xi + yz \int_0^1 \mathfrak{S}(x, \xi) f_{yz}^{11}(\xi) d\xi \left. \right\} \\
 & + \sum_{(x,y,z)} \left\{ (1-x) \int_0^1 \int_0^1 \mathfrak{S}(y, \eta) \mathfrak{S}(z, \zeta) f_x^0(\eta, \zeta) d\eta d\zeta + x \int_0^1 \int_0^1 \mathfrak{S}(y, \eta) \mathfrak{S}(z, \zeta) f_x^1(\eta, \zeta) d\eta d\zeta \right\} \\
 & + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \mathfrak{S}(x, \xi) \mathfrak{S}(y, \eta) \mathfrak{S}(z, \zeta) f''(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta,
 \end{aligned}$$

ove $\mathfrak{S}(x, \xi)$ designa la funzione di Burkhardt ⁽²⁾:

$$(5) \quad \mathfrak{S}(x, \xi) \left\{ \begin{array}{ll} = \xi(x-1), & \text{per } \xi \leq x, \\ = x(\xi-1), & \text{per } \xi \geq x, \end{array} \right.$$

e i termini delle sommatorie si ottengono, da quella scritta, operandovi le sostituzioni circolari (x, y, z) , (ξ, η, ζ) .

In ciò che segue si stabiliscono le condizioni di unicità, di esistenza e di stabilità delle soluzioni spettanti al sistema « polivibrante » del primo ordine coi termini di rimanenza ed argomenti ritardati lineare (6), (7) mentre nella Nota seguente e successive, elaborati in collaborazione col prof. L. E. Krivošein, si daranno le valutazioni dei moduli delle soluzioni dei problemi lineari o no di cui sopra e si esporrà una problematica analoga spettante ai sistemi polivibranti di ordine qualunque a due e più variabili indipendenti.

2. Consideriamo l'equazione polivibrante del primo ordine lineare con argomenti ritardati

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = & p(x) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + f(x, y) \\
 & + \sum_{i+j=0}^1 \left\{ r_{ij}(x, y) u[\alpha_i(x), \beta_j(y)] + \int_0^x \int_0^y \mathfrak{K}_{ij}(x, y; t, \tau) u[\alpha_i(t), \beta_j(\tau)] d\tau dt \right\},
 \end{aligned}$$

(2) Vari generalizzazioni della funzione di Burkhardt dati dall'autore [11], [18] sono stati chiamati funzioni di Burkhardt-Mangeron [7].

con le condizioni di frontiera

$$(7) \quad u(0, y) = \psi_1(y) (y \geq 0) \quad , \quad u(x, 0) = \psi_2(x) (x \geq 0) \quad , \quad \psi_1(0) = \psi_2(0) = 0,$$

$$u(x, y) \equiv \begin{cases} 0, & x \leq 0, y = 0, \\ 0, & y \leq 0, x = 0, \end{cases}$$

ove $r_{ij}(x, y)$, $\mathfrak{K}_{ij}(x, y; t, \tau)$ ($0 \leq i + j \leq 1$), $p(x)$, $f(x, y)$ sono funzioni continue note per tutti $x, t \in [0, a]$, $y, \tau \in [0, b]$; $\mathfrak{D} = [0, a] \times [0, b]$, mentre $\alpha_i(x)$, $\beta_j(y)$ denotano gli argomenti ritardati. Dall'equazione (6), tendendovi conto dalle (7), si ottiene

$$(8) \quad u(x, y) = \psi_2(x) + \psi_1(y) \exp \int_0^x p(x) dx + \int_0^x \int_0^y \exp \left[\int_0^x p(x) dx - \int_0^t p(t) dt \right]$$

$$\left[f(t, \tau) + \sum_{i+j=0}^1 r_{ij}(t, \tau) u[\alpha_i(t), \beta_j(\tau)] \right.$$

$$\left. + \int_0^t \int_0^\tau \mathfrak{K}_{ij}(t, \tau; \xi, \eta) u[\alpha_i(\xi), \beta_j(\eta)] d\xi d\eta \right] dt d\tau =$$

$$g(x, y) + \int_{\mathfrak{T}} \sum_{i+j=0}^1 P_{ij}(x, y; t, \tau) u[\alpha_i(x), \beta_j(\tau)] dt d\tau.$$

Ha luogo il seguente teorema:

Il sistema (6), (7) possiede nel dominio \mathfrak{D} una soluzione unica dotata di derivata totale prima continua e questa soluzione è data dalla soluzione dell'equazione integrale (8) ad argomenti ritardati [19]-[22].

3. La soluzione del problema (6), (7) è stabile se le funzioni $p(x)$, $f(x, y)$, $r_{ij}(x, y)$, $\mathfrak{K}_{ij}(x, y; t, \tau)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(x)$ si sottopongono alle perturbazioni continue. Infatti, considerando invece del problema (6), (7) il problema

$$(9) \quad \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} = p_1(x) \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + f(x, y) + \sum_{i+j=0}^1 \left\{ \sigma_{ij}(x, y) w[\alpha_i(x), \beta_j(y)] \right.$$

$$\left. + \int_{\mathfrak{T}} \mathfrak{L}_{ij}(x, y; t, \tau) w[\alpha_i(x), \beta_j(\tau)] dt d\tau \right\},$$

$$(10) \quad w(0, y) = \varphi_1(y) (y \geq 0) \quad , \quad w(x, 0) = \varphi_2(x) (x \geq 0) \quad , \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0,$$

$$w(x, y) \equiv \begin{cases} 0, & x \leq 0, y = 0, \\ 0, & y \leq 0, x = 0, \end{cases}$$

e proseguendo i calcoli analogamente con ciò che si è fatto per la deduzione dell'equazione integrale (8) si perviene alla seguente equazione integrale ad

argomenti ritardati

$$(11) \quad w(x, y) = g_1(x, y) + \iint_{\mathfrak{T}} \sum_{i+j=0}^1 N_{ij}(x, y; t, \tau) w[\alpha_i(t), \beta_j(\tau)] dt d\tau.$$

Si ha per conseguenza

$$(12) \quad |u(x, y) - w(x, y)| \leq |g_2(x, y)| + \iint_{\mathfrak{T}} \sum_{i+j=0}^1 |P_{ij}(x, y; t, \tau) \{u[\alpha_i(t), \beta_j(\tau)] - w[\alpha_i(t), \beta_j(\tau)]\}| dt d\tau,$$

ove si è posto

$$(13) \quad g_2(x, y) \equiv g(x, y) - g_1(x, y) + \iint_{\mathfrak{T}} \sum_{i+j=0}^1 [P_{ij}(x, y; t, \tau) - N_{ij}(x, y; t, \tau)] w[\alpha_i(t), \beta_j(\tau)] dt d\tau.$$

Dalla (12), tenendo conto della supposizione

$$(14) \quad l = 1 - \max_{\mathfrak{D}} \iint_{\mathfrak{T}} \sum_{i+j=0}^1 |P_{ij}(x, y; t, \tau)| dt d\tau > 0,$$

ne segue

$$(15) \quad |u(x, y) - w(x, y)| \leq \max_{\mathfrak{D}} |g(x, y)| : l.$$

Epperziò, se, ad esempio, hanno luogo le ineguaglianze

$$(16) \quad |g(x, y) - g_1(x, y)| \leq l\varepsilon : 2,$$

$$(17) \quad \max_{\mathfrak{D}} |P_{ij}(x, y; t, \tau) - N_{ij}(x, y; t, \tau)| \leq l\varepsilon : \left[2 \max_{\mathfrak{D}} \iint_{\mathfrak{T}} \sum_{i+j=0}^1 |w[\alpha_i(x), \beta_j(\tau)]| dt d\tau \right],$$

risulta pure

$$(18) \quad |u(x, y) - w(x, y)| < \varepsilon, \quad (x, y) \in \mathfrak{D},$$

e con ciò la validità dell'asserto.

Consideriamo adesso il problema della stabilità della soluzione del sistema (6), (7) rispetto alle piccole perturbazioni delle funzioni $\alpha_1(x)$, $\beta_1(y)$ rappresentanti il fenomeno dell'argomento ritardato. Analizziamo innanzitutto il problema (7) spettante all'equazione

$$(19) \quad \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} = p(x) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + f(x, y) + \sum_{i+j=0}^1 \left\{ r_{ij}(x, y) v[\gamma_i(x), \delta_j(y)] + \iint_{\mathfrak{T}} \mathfrak{K}_{ij}(x, y; t, \tau) v[\gamma_i(t), \delta_j(t)] dt d\tau \right\},$$

ove $\gamma_0(x) \equiv \alpha_0(x) \equiv x$, $\delta_0(y) \equiv \beta_0(y) \equiv y$. Dalla (19), tenendo conto delle (7) si ottiene

$$(20) \quad v(x, y) = g(x, y) + \iint_{\mathbb{T}} \sum_{i+j=0}^1 P_{ij}(x, y; t, \tau) v[\gamma_i(t), \delta_j(\tau)] dt d\tau.$$

Epperciò

$$(21) \quad \begin{aligned} u(x, y) - v(x, y) = & \iint_{\mathbb{T}} \sum_{i+j=0}^1 P_{ij}(x, y; t, \tau) \{u[\alpha_i(t), \beta_j(\tau)] - v[\gamma_i(t), \delta_j(\tau)]\} dt d\tau = \\ & \iint_{\mathbb{T}} \sum_{i+j=0}^1 P_{ij}(x, y; t, \tau) \{u[\alpha_i(t), \beta_j(\tau)] - v[\alpha_i(t), \beta_j(\tau)]\} dt d\tau \\ & + \iint_{\mathbb{T}} \sum_{i+j=0}^1 P_{ij}(x, y; t, \tau) \{v[\alpha_i(t), \beta_j(\tau)] - v[\gamma_i(t), \delta_j(\tau)]\} dt d\tau, \end{aligned}$$

Dalla (21) si deduce, nell'ipotesi della validità dell'ineguaglianza (14), se la funzione $v(\alpha, \beta)$ soddisfa, ad esempio, la condizione di Lipschitz

$$(22) \quad |v[\alpha_i, \beta_j] - v[\gamma_i, \delta_j]| \leq k[|\alpha_i - \gamma_i| + |\beta_j - \delta_j|], \quad k = \text{const},$$

$$0 \leq \alpha_i, \gamma_i \leq a \quad , \quad 0 \leq \beta_j, \delta_j \leq b,$$

e sono pure valide le ineguaglianze

$$(23) \quad \max_{[0, a]} |\alpha_i(x) - \gamma_i(x)| < \rho,$$

$$(24) \quad \max_{[0, b]} |\beta_j(y) - \delta_j(y)| < \rho,$$

ove si è posto

$$(25) \quad \rho = \varepsilon l : [2 k \max_{\mathbb{D}} \iint_{\mathbb{T}} P(x, y; t, \tau) dt d\tau ;$$

$$P(x, y; t, \tau) \equiv \sum_{i+j=0}^1 |P_{ij}(x, y; t, \tau)|,$$

l'ineguaglianza

$$|u(x, y) - v(x, y)| < \varepsilon, \quad (x, y) \in \mathbb{D}$$

e con ciò l'asserto.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] M. PICONE, *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, Volume Primo, Parte Seconda, Circolo Matematico di Catania, Editore, Catania 1923.
- [2] D. MANGERON, *Sopra un problema al contorno per le equazioni differenziali non lineari alle derivate parziali con caratteristiche reali multiple*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei » ser. 6^a, XVI (7-8), 305-310 (1932).
- [3] D. MANGERON, *Sur la dépendance des valeurs caractéristiques de domaines dans certains problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées totales d'ordre supérieur*, « C. r. Acad. Sci. de Roumanie », II (1), 25-28 (1937).
- [4] D. MANGERON, L. E. KROVIŠEIN, *Sopra una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone (A Mauro Picone nel suo 75° compleanno)*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. fis., mat. e nat. », ser. 8^a, XXXI (1-2), 27-32 (1961).
- [5] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra i problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate parziali con derivata d'ordine superiore di Picone*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », XXXIII, 226-266 (1963).
- [6] A. ROSENBLATT, *Sur l'application de la méthode des approximations de M. Picard à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles et multiples*, « C. r. Acad. Sci., Paris », 198, 1278-1280 (1933).
- [7] M. SALVADORI, *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica*, « Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa », ser. II, V, 51-72 (1936).
- [8] YU. M. BEREZANSKI, *O kraevyh zadačah dlja obschih differentsial'nyh uravnenii v častnyh proizvodnyh (Sui problemi al contorno per gli operatori differenziali generali a derivate parziali)*, « Doklady Akad. Nauk SSSR », 122 (6), 959-962 (1958).
- [9] D. MANGERON, *Sopra i problemi al contorno per le equazioni differenziali alle derivate parziali di quarto ordine con le caratteristiche reali doppie*, « Rend. Accad. Sci. fis. mat., Napoli », ser. 4^a, II, 1-11 (1932); « Giornale di Matematiche », ser. 3^a, 71, 1-51 (1933).
- [10] M. PICONE, *Attività dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo nel quadriennio 1933-1937*. Nel volume *L'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo*. Pubblicazione n. 27 dell'INAC, Roma 1938.
- [11] D. MANGERON, *Sur les noyaux associés à certains problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*, « Mathematica », XIV, 31-35 (1938).
- [12] M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica*. Conferenza tenuta il 12 maggio 1937 presso il Seminario Matematico dell'Università di Iași. Cfr. « Ann. Sci. Univ. Jassy », I sect. XXVI (1), 183-232 (1940).
- [13] D. MANGERON, *Sur les solutions périodiques d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*, « C. r. Acad. Sci., Paris », 204, 1022-1024 (1937).
- [14] D. MANGERON, *Sur certains problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*, « C. r. Acad. Sci., Paris », 204, 94-96 (1937).
- [15] D. MANGERON, *Sur certains problèmes à la frontière polygonale non totalement caractéristique pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*, « C. r. Acad. Sci., Paris », 204, 544-546 (1937).
- [16] STEFANIA RUSCIOR, *Il metodo delle equazioni integrali nello studio di alcuni problemi al contorno non lineari*, « Atti Accad. Naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat. », ser. 8^a, 35 (6) (1963).
- [17] J. FAVARD, *Quelques théorèmes concernant les équations polyvibrantes dites équations de Mangeron*, « Bul. Inst. politehn. Iași », s.n., XI (XV), [1-2] (1965).
- [18] D. MANGERON, *Sopra i problemi di Dirichlet per una classe di equazioni alle « derivate totali »*, « Bul. Inst. politehn. Iași », s.n., III (VII), [3-4] 49-52 (1957).

- [19] L. E. KRIVOŠEIN, *Približennoe rešenje načal'noi zadaci dlia odnogo klasa integro-differencial'nyh uravnenii* (Risoluzione con approssimazione del problema ai valori iniziali per una classe di equazioni integro-differenziali). Programma 2-oi Vsesoiuznoi konferenzii po vycislitel'noi matematike (22-26.I.1965), Mosca, p. 38.
- [20] A. D. MYŠKIS, *Obsceia teorija differencial'nyh uravnenii s zapazdyvaiuscim argumentom* (Teoria generale delle equazioni differenziali con argomento ritardato), « Uspehi mat. nauk », 4 (5), 99-141 (1949).
- [21] L. E. ELSGOLTZ, *Vvedenie v teoriju differencial'nyh uravnenii s otklonauscimsea argumentom* (Introduzione alla teoria delle equazioni differenziali con argomento ritardato). Izd. « Nauka », Mosca 1964.
- [22] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sistemi policalorici a rimanenza ed a argomento ritardato. Problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali con operatore calorico ed argomento ritardato*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », XXXV, 1-24 (1965) (Dedicata a Mauro Picone nel suo 80° compleanno).