Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Aquaro

Ricovrimenti puntualmente numerabili di uno spazio numerabilmente compatto

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.1-2, p. 19–21.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_1-2_19_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Matematica. — *Ricovrimenti puntualmente numerabili di uno spazio numerabilmente compatto.* Nota di GIOVANNI AQUARO, presentata [*] dal Socio M. PICONE.

Sia $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un ricovrimento aperto dello spazio topologico numerabilmente compatto E [1]. Se l'insieme I degli indici è numerabile, come è noto, esiste una parte finita H di I tale che la sottofamiglia $(U_\iota)_{\iota \in H}$ sia, del pari, un ricovrimento di E. Se l'ipotesi di numerabilità di I viene abbandonata, ferma restando la numerabile compattezza, in generale non esiste una sottofamiglia finita come quella di cui sopra.

Qui si osserva un fatto, fino ad ora non rilevato, e cioè che la $(U_\iota)_{\iota \in H}$, con H finito, esiste, anche se I non è numerabile, a condizione che il ricovrimento iniziale $(U_\iota)_{\iota \in I}$ sia puntualmente finito cioè, per ogni punto x di E l'insieme I_x^* degli $\iota \in I$ tali che $x \in U_\iota$, sia numerabile (al più).

Da ciò e da un teorema di A. Miščenko in [4] consegue che se E è, in aggiunta, regolare ed ha una base puntualmente numerabile allora E è metrizzabile e compatto.

Si deduce inoltre una generalizzazione di un risultato di R. Arens e J. Dugundji (cfr. [2]) che asserisce che ogni spazio metacompatto e numerabilmente compatto è compatto.

I seguenti lemmi hanno ufficio essenziale.

LEMMA 1. – *Se* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ *è un ricovrimento aperto dello spazio numerabilmente compatto e se gli* U_ι *sono non vuoti e a due a due disgiunti, allora l'insieme* I *degli indici è finito.*

Dim. – È riportata nella chiamata (^{5}) a piè pagina di [1] pag. 83.

LEMMA 2. – *Se* $(A_\iota)_{\iota \in I}$ *è una famiglia discreta di insiemi chiusi non vuoti dello spazio numerabilmente compatto* E, *allora l'insieme* I *degli indici è finito.*

Dim. – Posto $F = \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$, poiché la $(A_\iota)_{\iota \in I}$ è discreta ed ogni A_ι è chiuso, F è chiuso in E e quindi, come sottospazio di E, F è numerabilmente compatto. Poiché gli A_ι sono insiemi aperti non vuoti e a due a due disgiunti di F, la tesi consegue dal Lemma 1.

LEMMA 3. – *Supponiamo che* V *sia una parte simmetrica del prodotto* $E \times E$ *dell'insieme* E *per se stesso tale che* $\Delta_E \subset V$, *con* Δ_E *diagonale di* $E \times E$. *Allora esiste una parte* A *di* E *tale che* $E = V(A)$ [2] *e tale che* $x \in A$, $y \in A$, $x \neq y$ *implichi* $y \in \complement V(x)$.

(*) Nella seduta del 17 giugno 1965.

(1) La terminologia ed il simbolismo sono conformi a quelli di [3].

(2) Notoriamente si pone $V(A) = \{y \in E \mid \exists\, x \in A \ni \cdot (x, y) \in V\}$. Per ogni $x \in E$ si pone $V(x) = V(\{x\})$.

Dim. – Denotiamo con $\mathfrak{A}$ l'insieme delle parti Z di E tali che da $x \in Z$, $y \in Z$, $x \neq y$ consegna $y \in \complement V(x)$ (si esclude evidentemente, il caso banale che sia già $E = V(x)$ per un $x \in E$). Poiché $\mathfrak{A}$ ha carattere finito, per il teor. di Tukey, $\mathfrak{A}$ ha un elemento massimale A. Si constata immediatamente che A è la parte di E prevista dalla tesi.

Dopo queste premesse è immediato dimostrare la proposizione di cui nell'Introduzione.

PROP. 1. – *Se* E *è uno spazio numerabilmente compatto, per ogni ricovrimento aperto puntualmente numerabile* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ *di* E, *esiste una parte finita* H *dell'insieme* I *degli indici tale che la sottofamiglia* $(U_\iota)_{\iota \in H}$ *sia anche un ricovrimento di* E.

Dim. – Si ponga

$$V = \bigcup_{\iota \in I} (U_\iota \times U_\iota).$$

Evidentemente V è un intorno aperto simmetrico della diagonale Δ_E di $E \times E$ e quindi, per il lemma 3, esiste una parte A di E tale che

$$E = V(A) \left(= \bigcup_{x \in A} V(x)\right), \tag{1}$$

e risulti che

$$x \in A, y \in A, x \neq y \Rightarrow y \in \complement V(x).$$

Si noti ora che ogni $V(x)$ è aperto (in E) e si ha

$$V(x) = \bigcup_{\iota \in I_x^*} U_\iota \tag{2}$$

dove I_x^* è l'insieme degli $\iota \in I$ tali che $x \in U_\iota$.

Se è $x \in A$, poiché da $y \in A - \{x\}$ consegue $x \in \complement_E V(y)$, si ha

$$x \in \bigcap_{y \in A - \{x\}} \complement V(y) = \complement\left(\bigcup_{y \in A - \{x\}} V(y)\right).$$

Poiché $\bigcup_{y \in A - \{x\}} V(y)$ è aperto si ha

$$\overline{\{x\}} \subset \complement\left(\bigcup_{y \in A - \{x\}} V(y)\right) \subset V(x).$$

D'altra parte, da $y \in A - \{x\}$ consegue $\overline{\{x\}} \cap V(y) = \emptyset$ e quindi si conclude che $(\overline{\{x\}})_{x \in A}$ è una famiglia discreta di insiemi chiusi (a due a due disgiunti) e non vuoti di E.

Poiché E è numerabilmente compatto, per il lemma 2 la parte A di E è finita. Posto

$$H^* = \bigcup_{x \in A} I_x^*$$

per (1) e (2) risulta

$$E = \bigcup_{x \in A} \left(\bigcup_{\iota \in I_x^*} U_\iota\right) = \bigcup_{\iota \in H^*} U_\iota.$$

Poiché, A essendo finito ed ogni I_α^* essendo numerabile, H^* è numerabile, a causa della numerabile compattezza di E, esiste una parte finita H di H^*

tale che

$$E = \bigcup_{\iota \in H} U_\iota .$$

Da ciò la tesi.

A causa del citato risultato di Miščenko ([4]) teor. n. 1) si deduce:

PREP. 2. – *Se ogni parte ridotta ad un sol punto dello spazio topologico* E *è chiusa (spazio* (T_1)*) le seguenti due proposizioni sono equivalenti*:

a) E *è compatto ed ha base numerabile,*

b) E *è numerabilmente compatto ed ha base puntualmente numerabile.*

Dim. – Che a) implichi b), è del tutto ovvio.

Per stabilire che b) implica a), a causa del risultato di Miščenko di cui sopra basterà stabilire che E è compatto.

Sia, a tal fine, $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ un ricovrimento aperto di E.

Se $(B_\iota)_{\iota \in I}$ è una base puntualmente numerabile di E, esiste un parte H di I tale che $(B_\iota)_{\iota \in H}$ sia un ricovrimento (aperto) di E più fine di $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$. A causa della prop. 1 esiste una parte finita K di H tale che:

$$E = \bigcup_{\iota \in K} B_\iota .$$

Se, per ogni $\iota \in K$, $\lambda(\iota)$ è un elemento di L tale che $B_\iota \subset U_{\lambda(\iota)}$, risulta

$$E = \bigcup_{\iota \in K} U_{\lambda(\iota)}$$

e da ciò la tesi.

COROLLARIO. – *Se* E *è regolare e verifica una delle due condizioni equivalenti* a) *e* b) *della prop.* 2, E *è metrizzabile.*

Generalizzando la terminologia corrente si chiami *numerabilmente metacompatto* uno spazio topologico E se ogni suo ricovrimento aperto ha un raffinamento aperto puntualmente numerabile (nel senso di cui sopra). Allora sussiste la

PROP. 3. – *Se* E *è uno spazio topologico le seguenti proposizioni sono equivalenti*:

a) E *è compatto,*

b) E *è numerabilmente metacompatto e numerabilmente compatto.*

Dim. – È necessario soltanto dimostrare che b) implica a) e ciò consegue dalla prop. 1.

Da ciò, ovviamente, consegue il risultato di Arens e Dugundji sopra citato, e quindi, più in particolare, che ogni spazio paracompatto (e, per ciò, ogni spazio metrico) numerabilmente compatto è compatto.

BIBLIOGRAFIA.

[1] AQUARO G., *Spazi collettivamente normali ed estensioni di applicazioni continue,* « Rivista di Mat. Univ. Parma », vol. 2, pp. 77–90 (1961).

[2] ARENS R., DUGUNDJI J., *Remarks on the concept of compactress,* « Portug. Math. », vol. 9, pp. 141–143 (1950).

[3] BOURBAKI N., *Topologie Generale,* Actual. Scient. et Indoustr. Hermann (Paris).

[4] MIŠČENKO A., *Spaces with point countable bases,* « Doklady, Acad. Nauk U.R.S.S. » (translations of « Amer. Math. Soc. »), vol. 3, n. 3, pp. 855–858 (1962).