Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Prouse

Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione non omogenea delle onde, con termine dissipativo non lineare. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.1-2, p. 11–18.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_1-2_11_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione non omogenea delle onde, con termine dissipativo non lineare.* Nota II di GIOVANNI PROUSE, presentata (*) dal Corrisp. L. AMERIO.

2. Diamo le dimostrazioni dei teoremi 1, 2 enunciati nel § 1.

Dimostrazione del teorema 1.

Indichiamo con η_1 ed $\eta_2 > \eta_1$ due generici valori di $\eta \in J$; posto, nella (1.3), $h(\eta) = u'(\eta)$ per $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$, $h(\eta) = 0$ per $\eta \notin [\eta_1, \eta_2]$ (ciò che ovviamente è lecito) si ottiene

$$(2.1) \qquad \frac{1}{2}\| u(\eta_2)\|_E^2 - \frac{1}{2}\| u(\eta_1)\|_E^2 = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \{-(\beta(u'(\eta)), u'(\eta))_{L^2} + (f(\eta), u'(\eta))_{L^2}\} d\eta$$

da cui si deduce

$$(2.2) \qquad \left| \| u(\eta_2)\|_E^2 - \| u(\eta_1)\|_E^2 \right| \leq 2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} \{(\beta(u'(\eta)), u'(\eta))_{L^2} + \|f(\eta)\|_{L^2} \|u'(\eta)\|_{L^2}\} d\eta .$$

Posto d'altra parte nella (1.3) $h(\eta) = u(\eta)$ per $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$, $h(\eta) = 0$ per $\eta \notin [\eta_1, \eta_2]$, risulta

$$(2.3) \qquad (u'(\eta_2), u(\eta_2))_{L^2} - (u'(\eta_1), u(\eta_1))_{L^2} + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \{- \|u'(\eta)\|_{L^2}^2 + \|u(\eta)\|_{H_0^1}^2 +$$

$$+ (\beta(u'(\eta)), u(\eta))_{L^2} - (f(\eta), u(\eta))_{L^2}\} d\eta = 0.$$

Osserviamo che, posto nella (2.1) $\eta_1 = 0$ $\eta_2 = 1$, si ha

$$(2.4) \qquad \frac{1}{2}\| u(1)\|_E^2 - \frac{1}{2}\| u(0)\|_E^2 + \int_\Delta (\beta(u'(\eta)), u'(\eta))_{L^2} d\eta = \int_\Delta (f(\eta), u'(\eta))_{L^2} d\eta ,$$

da cui si deduce, tenendo presente la (1.5),

$$(2.5) \qquad \frac{h}{\rho} \|u'(0)\|_{L_0^{\rho+1}}^{\rho+1} \leq (\beta(u'(0)), u'(0))_{L_0^2} \leq \|f(0)\|_{L_0^2} \|u'(0)\|_{L_0^2} + \frac{1}{2}\|u(0)\|_E^2 .$$

(*) Nella seduta dell'8 maggio 1965.

Detta c_1 la costante di immersione di $L_0^{\varrho+1}$ in L_0^2, dalla (2.5) segue, per la (1.12),

$$(2.6) \qquad \| u'(0) \|_{L_0^{\varrho+1}}^{\varrho+1} \leq \frac{\rho K_1 c_1}{h} \| u'(0) \|_{L_0^{\varrho+1}} + \frac{\rho}{2h} \| u(0) \|_E^2 ,$$

ossia $\| u'(0) \|_{L_0^{\varrho+1}} \leq 1$, oppure $\| u'(0) \|_{L_0^{\varrho+1}}^2 \leq \frac{\rho K_1 c_1}{h} \| u'(0) \|_{L_0^{\varrho+1}} + \frac{\rho}{2h} \| u(0) \|_E^2$; in ogni caso

$$(2.7) \qquad \| u'(0) \|_{L_0^{\varrho+1}} \leq \max \left\{ 1 , \frac{1}{2} \left[\frac{\rho K_1 c_1}{h} + \sqrt{\frac{\rho^2 K_1^2 c_1^2}{h^2} + \frac{2\rho}{h} \| u(0) \|_E^2} \right] \right\} .$$

Sara perciò

$$(2.8) \qquad \| u'(0) \|_{L_0^{\varrho+1}}^2 \leq \max \left\{ 1 , \frac{\rho^2 K_1^2 c_1^2}{h^2} + \frac{\rho}{h} \| u(0) \|_E^2 \right\} = K_3^2 ,$$

osservando che è anche

$$(2.9) \qquad K_3^2 = \max \left\{ \frac{\rho K_1 c_1}{h} , 1 , \frac{\rho^2 K_1^2 c_1^2}{h^2} + \frac{\rho}{h} \| u(0) \|_E^2 \right\} .$$

Consideriamo un generico punto $\overline{\eta} \in J_0$ e dimostriamo anzitutto che risulta

$$(2.10) \qquad \| u(\overline{\eta} + 1) \|_E^2 \leq \max \{ \| u(\overline{\eta}) \|_E^2 , K_4 \} ,$$

dove K_4 dipende da K_1, Ω e $\| u(0) \|_E$, ma non da $\overline{\eta}$.

Supponiamo, in un primo tempo, che risulti

$$(2.11) \qquad \| u'(\overline{\eta}) \|_{L_0^{\varrho+1}}^2 = \left\{ \int_\Delta \| u'(\overline{\eta} + \eta) \|_{L^{\varrho+1}}^{\varrho+1} d\eta \right\}^{2/(\varrho+1)} \leq K_3^2 ;$$

sarà allora

$$(2.12) \qquad \| u'(\overline{\eta}) \|_{L_0^2}^2 \leq c_1^2 K_3^2 = K_5^2 .$$

In virtù della (2.12), esisteranno due punti $\eta' \in \left[\overline{\eta} , \overline{\eta} + \frac{1}{4} \right]$, $\eta'' \in \left[\overline{\eta} + \frac{3}{4} , \overline{\eta} + 1 \right]$ nei quali si abbia

$$(2.13) \qquad \| u'(\eta') \|_{L^2}^2 \leq 4 K_5^2 \quad , \quad \| u'(\eta'') \|_{L^2}^2 \leq 4 K_5^2$$

Risulta poi, $\forall \eta \in [\overline{\eta} , \overline{\eta} + 1]$,

$$(2.14) \qquad \| u(\eta) \|_{L^2}^2 \leq 2 \| u(\overline{\eta}) \|_{L^2}^2 + 2 \| u'(\overline{\eta}) \|_{L_0^2}^2 \leq 2 \| u(\overline{\eta}) \|_{L^2}^2 + 2K_5^2$$

e perciò

$$(2.15) \qquad \| u(\eta) \|_{L^2} \leq \sqrt{2} \| u(\overline{\eta}) \|_{L^2} + K_6 .$$

Si ha d'altra parte, per l'ipotesi (a2)

$$|\beta(\xi)| \leq k\left(|\xi| + \frac{1}{\rho}|\xi|^{\rho}\right) \tag{2.16}$$

e, di conseguenza, per le (2.11), (2.12), posto $Q' = \Omega \times [\eta', \eta'']$ ed applicando la disuguaglianza di Hölder

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} (\beta(u'(\eta)), u(\eta))_{L^2} d\eta \right| \leq k \int_{Q'} \left[|u'(x,\eta)| + \frac{1}{\rho} |u'(x,\eta)|^{\rho} \right] |u(x,\eta)| dQ \leq \tag{2.17}$$

$$\leq k \left\{ \int_{Q'} |u'(x,\eta)|^2 dQ \right\}^{1/2} \left\{ \int_{Q'} |u(x,\eta)|^2 dQ \right\}^{1/2} + \frac{k}{\rho} \left\{ \int_{Q'} |u'(x,\eta)|^{\rho+1} dQ \right\}^{\frac{\rho}{\rho+1}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_{Q'} |u(x,\eta)|^{\rho+1} dQ \right\}^{\frac{1}{\rho+1}} \leq k \| u'(\overline{\eta}) \|_{L_0^2} \| u \|_{L^2(Q')} + \frac{k}{\rho} \| u'(\overline{\eta}) \|_{L_0^{\rho+1}}^{\rho} \| u \|_{L^{\rho+1}(Q')} \leq$$

$$\leq \left(k K_5 c_2 + \frac{k}{\rho} K_3^{\rho} \right) \| u \|_{L^{\rho+1}(Q')} .$$

Per l'ipotesi (b2) risulta poi, essendo $1 \geq \eta'' - \eta' \geq \frac{1}{2}$,

$$\| u \|_{L^{\rho+1}(Q')}^2 \leq c_3^2 \| u \|_{H^1(Q')}^2 \leq c_4 \int_{\eta'}^{\eta''} \{ \| u(\eta) \|_{H_0^1}^2 + \| u'(\eta) \|_{L^2}^2 \} d\eta \leq \tag{2.18}$$

$$\leq c_4 \int_{\eta'}^{\eta''} \| u(\eta) \|_{H_0^1}^2 d\eta + K_7 .$$

Applichiamo la (2.3) all'intervallo $[\eta', \eta'']$; si ha, per le (1.12), (2.12), (2.13), (2.15), (2.17), (2.18),

$$\int_{\eta'}^{\eta''} \| u(\eta) \|_{H_0^1}^2 d\eta \leq \| u'(\eta') \|_{L^2} \| u(\eta') \|_{L^2} + \| u'(\eta'') \|_{L^2} \| u(\eta'') \|_{L^2} + \tag{2.19}$$

$$+ \| u'(\overline{\eta}) \|_{L_0^2}^2 + \| f(\overline{\eta}) \|_{L_0^2} \| u(\overline{\eta}) \|_{L_0^2} + \left| \int_{\eta'}^{\eta''} (\beta(u'(\eta)), u(\eta))_{L^2} d\eta \right| \leq$$

$$\leq 4 K_5 (\sqrt{2} \| u(\overline{\eta}) \|_{L^2} + K_6) + K_5^2 + K_1 (\sqrt{2} \| u(\overline{\eta}) \|_{L^2} + K_6) + K_8 \left\{ \int_{\eta'}^{\eta''} \| u(\eta) \|_{H_0^1}^2 d\eta \right\}^{1/2} +$$

$$+ K_9 \leq K_8 \left\{ \int_{\eta'}^{\eta''} \| u(\eta) \|_{H_0^1}^2 d\eta \right\}^{1/2} + K_{10} \| u(\overline{\eta}) \|_{L^2} + K_{11} ,$$

da cui si ricava

$$\int_{\eta'}^{\eta''} \| u(\eta) \|_{H_0^1}^2 d\eta \leq \frac{1}{4} \left(K_8 + \sqrt{K_8^2 + 4 K_{10} \| u(\overline{\eta}) \|_{L^2} + 4 K_{11}} \right)^2 \leq \tag{2.20}$$

$$\leq K_{12} \| u(\overline{\eta}) \|_{L^2} + K_{13} .$$

Tenendo presente la (2.12) e posto $K_{15} = K_{13} + K_5^2$, si ha poi

$$(2.21) \qquad \int_{\eta'}^{\eta''} \| u(\eta) \|_E^2 \, d\eta \leq K_{14} \| u(\bar{\eta}) \|_E + K_{15} .$$

Esiste quindi un punto $\eta^* \in [\eta', \eta'']$ nel quale è

$$(2.22) \qquad \| u(\eta^*) \|_E^2 \leq 2 \, [K_{14} \| u(\bar{\eta}) \|_E + K_{15}] = K_{16} \| u(\bar{\eta}) \|_E + K_{17} .$$

Applichiamo ora la (2.2) ponendo $\eta_1 = \eta^*, \eta_2 = \eta \in [\bar{\eta}, \bar{\eta} + 1]$; si ottiene per le (2.11), (2.12), (2.16),

$$(2.23) \qquad | \| u(\eta) \|_E^2 - \| u(\eta^*) \|_E^2 | \leq 2 \left| \int_{\eta^*}^{\eta} \{ k \| u'(\eta) \|_{L^2}^2 + \frac{k}{\rho} \| u'(\eta) \|_{L^{\rho+1}}^{\rho+1} + \right.$$

$$\left. + \| f(\eta) \|_{L^2} \| u'(\eta) \|_{L^2} \} \, d\eta \right| \leq 2 \, [k K_5^2 + \frac{k}{\rho} K_3^{\rho+1} + K_1 K_5] = K_{18} .$$

Dalle (2.22), (2.23) segue quindi, per $\eta \in [\bar{\eta}, \eta + 1]$,

$$(2.24) \qquad \| u(\eta) \|_E^2 \leq K_{16} \| u(\bar{\eta}) \|_E + K_{19} .$$

Perciò, o $\| u(\eta) \|_E \leq \| u(\bar{\eta}) \|_E$, oppure $\| u(\eta) \|_E^2 \leq K_{16} \| u(\eta) \|_E + K_{19}$; in ogni caso, si ha

$$(2.25) \qquad \| u(\eta) \|_E \leq \max \{ \| u(\bar{\eta}) \|_E \; , \; \frac{1}{2} (K_{16} + \sqrt{K_{16}^2 + 4 K_{19}}) \} ,$$

cioè

$$(2.26) \qquad \| u(\eta) \|_E^2 \leq \max \{ \| u(\bar{\eta}) \|_E^2 \; , \; K_4 \} ,$$

dove K_4 è una quantità che dipende solo da $K_1, \Omega, \| u(0) \|_E$.

In particolare, si ha

$$(2.27) \qquad \| u(\bar{\eta} + 1) \|_E^2 \leq \max \{ \| u(\bar{\eta}) \|_E^2 \; , \; K_4 \} .$$

Supponiamo ora che non valga la (2.11); sarà allora

$$(2.28) \qquad \| u'(\bar{\eta}) \|_{L_0^{\rho+1}}^2 > K_3^2 ,$$

e, di conseguenza, per la (2.9),

$$(2.29) \qquad \| u'(\bar{\eta}) \|_{L_0^{\rho+1}}^{\rho} > \| u'(\bar{\eta}) \|_{L_0^{\rho+1}} > \frac{\rho K_1 c_1}{h} .$$

Dalla (2.1) si ottiene allora

$$(2.30) \qquad \| u(\bar{\eta} + 1) \|_E^2 - \| u(\bar{\eta}) \|_E^2 \leq 2 \left[-\frac{h}{\rho} \| u'(\bar{\eta}) \|_{L_0^{\rho+1}}^{\rho+1} + K_1 \| u'(\bar{\eta}) \|_{L_0^2} \right] \leq$$

$$\leq 2 \| u'(\bar{\eta}) \|_{L_0^2} \left[-\frac{h}{c_1 \rho} \| u'(\bar{\eta}) \|_{L_0^{\rho+1}}^{\rho} + K_1 \right] < 0 .$$

Si ha quindi, per le (2.27), (2.30), in ogni caso,

$$(2.31) \qquad \| u(\bar\eta + 1) \|_E^2 \leq \max \{ \| u(\bar\eta) \|_E^2 \,,\, K_4 \}.$$

Consideriamo ora l'intervallo $[0, 1]$ e poniamo $\bar\eta = 0$; in virtù delle (2.8), (2.9), (2.26) risulta allora, osservando che è $\| u'(0) \|^2_{L_0^{\varrho+1}} \leq K_3^2$ e che perciò vale la (2.11),

$$(2.32) \qquad \| u(\eta) \|_E^2 \leq \max \{ \| u(0) \|_E^2 \,,\, K_4 \} = K_1^{*2} \qquad (\eta \in [0, 1]).$$

Detto η_0 un generico punto $\in [0, 1]$, introduciamo la successione $\{ \eta_j \}$, con $\eta_j = \eta_0 + j$ $(j = 1, 2, \cdots)$; si ha, per le (2.31), (2.32),

$$(2.33) \quad \| u(\eta_{j+1}) \|_E^2 \leq \max \{ \| u(\eta_j) \|_E^2 \,,\, K_4 \} \leq \max \{ \| u(\eta_0) \|_E^2 \,,\, K_4 \} = K_1^{*2}.$$

Risulta dunque, $\forall \eta \in J_0$,

$$(2.34) \qquad \| u(\eta) \|_E^2 \leq K_1^{*2}$$

ed inoltre, per una relazione analoga alla (2.5),

$$(2.35) \qquad \| u'(t) \|_{L_0^{\varrho+1}} \leq K_2^* \qquad (t \in J_0).$$

Il teorema è perciò dimostrato.

Dimostrazione del teorema 2.

Osserviamo che, in virtù del teorema di esistenza ed unicità enunciato nel § 1 e tenendo presente la (1.11) e le notazioni ivi adottate, perché il teorema sia provato basterà far vedere che è, per ogni $\eta \in J_0$,

$$(2.36) \qquad \| u_n'(\eta) \|_E \leq K_3^*.$$

Osserviamo inoltre che, per le ipotesi fatte, possiamo derivare le (1.10), ottenendo

$$(2.37) \quad (u_n'''(\eta), g_k)_{L^2} + (u_n'(\eta), g_k)_{H_0^1} + (\beta'(u_n'(\eta))\, u_n''(\eta), g_k)_{L^2} = (f'(\eta), g_k)_{L^2}$$
$$(k = 1, \cdots n).$$

Moltiplichiamo le (2.37) per $\alpha_{kn}''(\eta)$ e sommiamo; si ottiene

$$(2.38) \quad (u_n'''(\eta), u_n''(\eta))_{L^2} + (u_n'(\eta), u_n''(\eta))_{H_0^1} + (\beta'(u_n'(\eta))\, u_n''(\eta), u_n''(\eta))_{L^2} =$$
$$= (f'(\eta), u_n''(\eta))_{L^2},$$

ossia, anche, integrando fra due generici valori η_1 ed $\eta_2 \in J_0$,

$$(2.39) \qquad \frac{1}{2} \| u_n'(\eta_2) \|_E^2 - \frac{1}{2} \| u_n'(\eta_1) \|_E^2 =$$
$$= \int_{\eta_1}^{\eta_2} \{ - (\beta'(u_n'(\eta))\, u_n''(\eta), u_n''(\eta))_{L^2} + (f'(\eta), u_n''(\eta))_{L^2} \} \, d\eta.$$

Moltiplicando poi le (2.37) per $\alpha'_{kn}(\eta)$, sommando ed integrando fra η_1 ed η_2, risulta, analogamente,

$$(2.40) \qquad (u''_n(\eta_2), u'_n(\eta_2))_{L^2} - (u''_n(\eta_1), u'_n(\eta_1))_{L^2} +$$

$$+\int_{\eta_1}^{\eta_2}\{-\|u''_n(\eta)\|^2_{L^2} + \|u'_n(\eta)\|^2_{H^1_0} + (\beta'(u'_n(\eta))\, u''_n(\eta), u'_n(\eta))_{L^2} - (f(\eta), u'_n(\eta))_{L^2}\}\, d\eta = 0.$$

Si ha poi (cfr. [2]):

$$(2.41) \qquad (\beta'(u'_n(0))\, u''_n(0), u''_n(0))_{L^2_0} \leq K_3^2$$

ed inoltre, in virtù del teorema 1, per n abbastanza grande,

$$(2.42) \qquad \|u_n(\eta)\|_E \leq 2\, K_1^* \qquad (\eta \in J_0)$$

$$(2.43) \qquad \|u'_n(t)\|_{L_0^{\varrho+1}} \leq 2\, K_2^* \qquad (t \in J_0).$$

Consideriamo un generico punto $\bar{\eta} \in J_0$ e dimostriamo anzitutto, in modo analogo a quanto fatto nel teorema 1, che risulta

$$(2.44) \qquad \|u'_n(\bar{\eta} + 1)\|_E \leq \max\{\|u'_n(\bar{\eta})\|_E, K_3^*\},$$

essendo K_3^* indipendente da $\bar{\eta}$.

Supponiamo, in un primo tempo, che risulti

$$(2.45) \qquad (\beta'(u'_n(\bar{\eta}))\, u''_n(\bar{\eta}), u''_n(\bar{\eta}))_{L^2_0} \leq \max\left\{K_3^2, \frac{K_2^2}{h}\right\} = K_4^2;$$

sarà allora, per le (1.5), (2.43),

$$(2.46) \qquad \|u''_n(\bar{\eta})\|^2_{L^2_0} + \|u'_n(\bar{\eta})\|^2_{L_0^{\varrho+1}} \leq K_5^2$$

ed esisteranno due punti $\eta'_n \in \left[\bar{\eta}, \bar{\eta} + \frac{1}{4}\right]$, $\eta''_n \in \left[\bar{\eta} + \frac{3}{4}, \bar{\eta} + 1\right]$ nei quali è

$$(2.47) \qquad \|u''_n(\eta'_n)\|^2_{L^2} + \|u'_n(\eta'_n)\|^2_{L^{\varrho+1}} \leq 4\, K_5^2 = K_6^2,$$

$$\|u''_n(\eta''_n)\|^2_{L^2} + \|u'_n(\eta''_n)\|^2_{L^{\varrho+1}} \leq 4\, K_5^2 = K_6^2.$$

Osserviamo d'altra parte che si ha

$$(2.48) \qquad \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\beta'(v(\eta))\, v'(\eta), v(\eta))_{L^2}\, d\eta = \int_{\eta_1}^{\eta_2} d\eta \int_\Omega \beta'(v(x,\eta))\, v'(x,\eta)\, v(x,\eta)\, d\Omega =$$

$$= \int_\Omega d\Omega \int_{\eta_1}^{\eta_2} \left[\frac{\partial}{\partial\eta}\beta(v(x,\eta))\right] v(x,\eta)\, d\eta =$$

$$= \int_\Omega d\Omega\, [\beta(v(x,\eta))\, v(x,\eta)]_{\eta_1}^{\eta_2} - \int_\Omega d\Omega \int_{\eta_1}^{\eta_2} \beta(v(x,\eta))\, \frac{\partial v(x,\eta)}{\partial\eta}\, d\eta =$$

$$= \int_\Omega [\beta(v(x,\eta_2))\, v(x,\eta_2) - \beta(v(x,\eta_1))\, v(x,\eta_1) - B(x,\eta_2) + B(x,\eta_1)]\, d\Omega,$$

avendo posto $B(w) = \int_0^w \beta(\xi)\, d\xi$. Risulta poi, per la (1.5)

$$B(w) \le k\left(\frac{w^2}{2} + \frac{|w|^{\varrho+1}}{\rho(\rho+1)}\right) \tag{2.49}$$

e si ha, di conseguenza, per le (2.48), (1.5)

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} (\beta'(v(\eta))\, v'(\eta), v(\eta))_{L^2}\, d\eta \right| \le \tag{2.50}$$

$$\le K_7 \int_\Omega [v^2(x, \eta_2) + v^2(x, \eta_1) + |v(x, \eta_2)|^{\varrho+1} + |v(x, \eta_1)|^{\varrho+1}]\, d\Omega .$$

Risulta quindi, ricordando le (2.47),

$$\left| \int_{\eta'_n}^{\eta''_n} (\beta'(u'_n(\eta))\, u''_n(\eta), u'_n(\eta))_{L^2}\, d\eta \right| \le \tag{2.51}$$

$$\le K_7 [\| u'_n(\eta'_n)\|^2_{L^2} + \| u'_n(\eta''_n)\|^2_{L^2} + \| u'_n(\eta'_n)\|^{\varrho+1}_{L^{\varrho+1}} + \| u'_n(\eta''_n)\|^{\varrho+1}_{L^{\varrho+1}}] \le K_8^2 .$$

Applichiamo la (2.40) all'intervallo $[\eta'_n, \eta''_n]$; si ha, tenendo presente le (2.42), (2.43), (2.46), (2.47), (2.51)

$$\int_{\eta'_n}^{\eta''_n} \| u'_n(\eta)\|^2_{H^1_0}\, d\eta = -(u''_n(\eta''_n), u'_n(\eta''_n))_{L^2} + (u''_n(\eta'_n), u'_n(\eta'_n))_{L^2} + \tag{2.52}$$

$$+ \int_{\eta'_n}^{\eta''_n} \{\| u''_n(\eta)\|^2_{L^2} - (\beta'(u'_n(\eta))\, u''_n(\eta), u'_n(\eta))_{L^2} + (f'(\eta), u'_n(\eta))_{L^2}\}\, d\eta \le$$

$$\le 4\, K_6\, K_1^* + K_5^2 + K_8^2 + 2\, K_2\, K_1^* = K_9^2 .$$

Dalle (2.46), (2.52) si deduce perciò

$$\int_{\eta'_n}^{\eta''_n} \| u'_n(\eta)\|^2_E\, d\eta \le K_5^2 + K_9^2 = K_{10}^2 \tag{2.53}$$

ed esiste quindi un punto $\eta^*_n \in [\eta'_n, \eta''_n]$ nel quale è

$$\| u'_n(\eta^*_n)\|^2_E \le 2\, K_{10}^2 = K_{11}^2 . \tag{2.54}$$

Dalla (2.39) si deduce poi, posto $\eta_1 = \eta^*_n$, $\eta_2 = \eta \in [\bar\eta, \bar\eta + 1]$ e ricordando le (2.45), (2.46)

$$\left| \| u'_n(\eta^*_n)\|^2_E - \| u'_n(\eta)\|^2_E \right| \le \tag{2.55}$$

$$\le 2 \left| \int_{\eta^*_n}^{\eta} \{(\beta'(u'_n(\eta))\, u''_n(\eta), u''_n(\eta))_{L^2} + \| f'(\eta)\|_{L^2} \| u''_n(\eta)\|_{L^2}\}\, d\eta \right| \le 2\, K_4^2 + 2\, K_2\, K_5 = K_{12}^2$$

e, di conseguenza,

$$\|u'_n(\eta)\|_E^2 \leq K_{11}^2 + K_{12}^2 = K_3^{*2} \qquad (\eta \in [\bar\eta , \bar\eta + 1]). \tag{2.56}$$

Supponiamo ora che non valga la (2.45), ossia che risulti

$$(\beta'(u'_n(\bar\eta))\, u''_n(\bar\eta) , u''_n(\bar\eta))_{L_0^2} > K_4^2 = \max\left\{K_3^2 , \frac{K_2^2}{h}\right\}. \tag{2.57}$$

Se allora è

$$\|u''_n(\bar\eta)\|_{L_0^2} \leq \frac{K_2}{h} , \tag{2.58}$$

dalla (2.39) si ottiene

$$\|u'_n(\bar\eta + 1)\|_E^2 - \|u'_n(\bar\eta)\|_E^2 \leq \tag{2.59}$$

$$\leq 2\,[-(\beta'(u'_n(\bar\eta))\, u''_n(\bar\eta), u''_n(\bar\eta))_{L_0^2} + \|f'(\bar\eta)\|_{L_0^2}\|u''_n(\bar\eta)\|_{L_0^2}] \leq 2\left[-K_4^2 + K_2\frac{K_2}{h}\right] \leq 0 .$$

Se invece fosse

$$\|u''_n(\bar\eta)\|_{L_0^2} > \frac{K_2}{h} , \tag{2.60}$$

si avrebbe, per la (1.5),

$$\begin{aligned} \|u'_n(\bar\eta + 1)\|_E^2 - \|u'_n(\bar\eta)\|_E^2 &\leq 2\,[-(\beta'(u'_n(\bar\eta))\, u''_n(\bar\eta) , u''_n(\bar\eta))_{L_0^2} + \\ &+ \|f'(\bar\eta)\|_{L_0^2}\|u''_n(\bar\eta)\|_{L_0^2}] \leq 2\|u''_n(\bar\eta)\|_{L_0^2}[-h\|u''_n(\bar\eta)\|_{L_0^2} + \|f'(\bar\eta)\|_{L_0^2}] \leq \\ &\leq 2\|u''_n(\bar\eta)\|_{L_0^2}\left(-h\frac{K_2}{h} + K_2\right) = 0 . \end{aligned} \tag{2.61}$$

Risulta perciò, per le (2.56), (2.59), (2.61), in ogni caso,

$$\|u'_n(\bar\eta + 1)\|_E \leq \max\{\|u'_n(\bar\eta)\|_E , K_3^*\} . \tag{2.62}$$

Consideriamo ora l'intervallo $[0 , 1]$ e poniamo $\bar\eta = 0$; per le (2.41), (2.45), (2.56), si ha, $\forall\, \eta \in [0 , 1]$,

$$\|u'_n(\eta)\|_E \leq K_3^* . \tag{2.63}$$

Detto η_0 un generico punto $\in [0 , 1]$, consideriamo la successione $\{\eta_j\}$, con $\eta_j = \eta_0 + j$ $(j = 1 , 2 , \cdots)$; risulta per le (2.62), (2.63),

$$\|u'_n(\eta_{j+1})\|_E \leq \max\{\|u'_n(\eta_j)\|_E , K_3^*\} \leq \max\{\|u'_n(\eta_0)\|_E , K_3^*\} = K_3^* . \tag{2.64}$$

Si ha dunque, $\forall\, \eta \in J_0$,

$$\|u'_n(\eta)\|_E \leq K_3^* , \tag{2.65}$$

ciò che dimostra il teorema.