
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

MARIALUISA DE SOCIO

Influenza di alcuni termini non lineari sul campo elettromagnetico in un gas ionizzato

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 38 (1965), n.6, p. 860–865.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_6_860_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica-matematica. — *Influenza di alcuni termini non lineari sul campo elettromagnetico in un gas ionizzato* (*). Nota di MARIALUISA DE SOCIO, presentata (**) dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. Com'è noto, le equazioni per la propagazione di un campo elettromagnetico $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ che si propaga in un gas ionizzato si possono ottenere associando alle equazioni di Maxwell:

$$(1) \quad \begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + Ne \mathbf{v} + \mathbf{j} \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \end{cases}$$

l'equazione:

$$(2) \quad m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Nella (1) ε e μ sono al solito la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del gas non ionizzato, e la carica dell'elettrone $\mathbf{v}$ e N rispettivamente la velocità media degli elettroni e il loro numero per unità di volume (trascuriamo per semplicità l'azione degli ioni), $\mathbf{j}$ la densità di corrente impressa: con questo vettore schematizziamo le sorgenti del campo. Nella (2) m è la massa dell'elettrone, $\mathbf{F}$ la forza agente su di esso, ossia la risultante della forza elettrica $e \mathbf{E}$, della forza di Lorentz $e\mu \mathbf{v} \times \mathbf{H}$, e dell'azione degli urti fra elettroni e molecole, che schematizzeremo, come si fa spesso, con una forza d'attrito proporzionale a $\mathbf{v}$, ossia uguale a $-\nu m \mathbf{v}$, dove ν rappresenta il numero medio degli urti di un elettrone per unità di tempo.

Tenendo conto della ben nota espressione di $d\mathbf{v}/dt$, la (2) si può anche scrivere nella forma:

$$(2') \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{e}{m} \mathbf{E} - \nu \mathbf{v} - \frac{d\nu}{dP} \mathbf{v} + \frac{e\mu}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{H}.$$

I due ultimi termini a secondo membro della (2'), che chiameremo anche per brevità termine d'inerzia e termine di Lorentz, si ammettono in generale trascurabili rispetto agli altri termini, sì che usualmente ⁽¹⁾ si associa al sistema (1) l'equazione:

$$(2'') \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{e}{m} \mathbf{E} - \nu \mathbf{v}.$$

In una Nota precedente ⁽²⁾, supponendo $\nu = 0$, ho studiato la propagazione in un gas ionizzato di onde sferiche supposte generate da un dipolo elettrico

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 4 del Comitato Nazionale delle Matematiche del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 maggio 1965.

(1) H. BREMMER, *Propagation of electromagnetic waves*, « Handbuch der Physik », vol. XVI, p. 546.

(2) M. DE SOCIO, *Sulla propagazione delle onde sferiche in un gas ionizzato non lineare*. In corso di stampa negli « Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino ».

e da un dipolo magnetico sovrapposti e ho dimostrato che nell'ipotesi $v = 0$ e in prossimità del fronte d'onda i contributi dei termini d'inerzia e di Lorentz nell'espressione del campo magnetico si compensano, sicché il campo magnetico ha lo stesso valore che avrebbe se fosse valida la (2''); per il campo elettrico invece la presenza dei termini non lineari comporta una lieve modifica.

In questa Nota dimostrerò che il risultato ora accennato è valido in generale e non soltanto in prossimità del fronte, per le soluzioni di (1) e (2') con $v = 0$, supposto N costante in tutto lo spazio e nell'ipotesi di opportune condizioni iniziali, in particolare nulle. Il campo magnetico cioè ha la stessa espressione che si avrebbe associando alla (1) la (2'') con $v = 0$, mentre il campo elettrico viene alterato di una quantità calcolabile in via approssimata.

Si può perciò concludere, generalizzando il risultato della Nota precedente, che se si tien conto del termine d'inerzia nella (2') bisogna tener conto anche del termine di Lorentz e viceversa.

Inoltre si può osservare che il nostro procedimento permette di ridurre l'integrazione del sistema non lineare (1) e (2') a un sistema lineare ed a una sola equazione non lineare e ciò può avere qualche interesse dal punto di vista matematico. Per raggiungere il nostro risultato è però necessario premettere un teorema di unicità per le (1) e (2'), teorema interessante anche di per se stesso e che verrà enunciato in modo preciso nel prossimo paragrafo.

2. Supposti assegnati i valori iniziali di $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{v}$ in tutto lo spazio e in ogni istante e in tutto lo spazio la densità di corrente impressa $\mathbf{j}$, dimostriamo un teorema di unicità per le soluzioni del sistema formato da (1) e (2'), qualora si suppongano $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{v}$, assieme alle loro derivate prime, continue e limitate in tutto lo spazio e in ogni istante t di un intervallo $(0, T)$ con T comunque grande. Potremo nel presente teorema supporre anche N e v variabili da punto a punto, purché N , v , grad N limitati in tutto lo spazio, inoltre N , grandezza ovviamente non negativa, limitata inferiormente in ogni dominio finito dello spazio da un numero positivo ⁽³⁾.

Per la dimostrazione procediamo al solito per assurdo, supponiamo cioè esistano due diverse soluzioni $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{v}; \mathbf{E} + \mathbf{E}', \mathbf{H} + \mathbf{H}', \mathbf{v} + \mathbf{v}'$ del sistema in discorso, corrispondenti alle stesse condizioni iniziali e quindi tali che per $t = 0$ risulti $\mathbf{E}' = \mathbf{H}' = \mathbf{v}' = 0$. Sottraiamo ora membro a membro le identità ottenute per ogni equazione del sistema (1) e (2'), sostituendo in esse separatamente le due soluzioni indicate. Si ottiene:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{H}' = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} + Ne \mathbf{v}' \\ \text{rot } \mathbf{E}' = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = \frac{e}{m} \mathbf{E}' - v \mathbf{v}' - \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v}' - \frac{d\mathbf{v}'}{dP} \mathbf{v} - \frac{d\mathbf{v}'}{dP} \mathbf{v}' + \frac{e\mu}{m} (\mathbf{v} \times \mathbf{H}' + \mathbf{v}' \times \mathbf{H} + \mathbf{v}' \times \mathbf{H}'). \end{array} \right.$$

(3) Queste ipotesi si potrebbero sostituire con altre meno restrittive.

Moltiplichiamo scalarmente la prima equazione di (4) per $-\mathbf{E}'$, la seconda per $\mathbf{H}'$, la terza per $Nm \mathbf{v}'$. Si ha, dopo semplici passaggi ⁽⁴⁾, sommando membro a membro ed integrando in dominio D delimitato da una superficie Σ :

$$(5) \quad \int_D \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon \mathbf{E}'^2 + \mu \mathbf{H}'^2 + Nm \mathbf{v}'^2}{2} \right) dt = - \int_{\Sigma} \mathbf{E}' \times \mathbf{H}' \cdot \mathbf{n} d\Sigma - m \int_D v N \mathbf{v}'^2 dD - \\ - \frac{m}{2} \int_D \operatorname{div} [N v'^2 (\mathbf{v} + \mathbf{v}')] dD + \frac{m}{2} \int_D v'^2 \operatorname{div} N (\mathbf{v} + \mathbf{v}') dD - \\ - m \int_D N \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' dD + e\mu \int_D N \mathbf{v} \times \mathbf{H}' \cdot \mathbf{v}' dD.$$

Osserviamo intanto che essendo $d\mathbf{v}/dP$ limitata in tutto lo spazio e in ogni istante t di $(0, T)$ (diremo brevemente in ST), esiste un numero $L > 0$ tale che ⁽⁵⁾:

$$(6) \quad \left| \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \right| \leq L v'^2$$

in tutto ST, inoltre poiché N , $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ e le loro derivate sono limitate, esiste un numero positivo M_1 tale che in ST sia:

$$(7) \quad |\operatorname{div} N (\mathbf{v} + \mathbf{v}')| \leq M_1,$$

mentre ricordando la relazione di Cauchy si ha, detto M_2 un valore maggiorante per $|\mathbf{v}|$:

$$(8) \quad |\mathbf{v} \times \mathbf{H}' \cdot \mathbf{v}'| \leq v H' v' \leq M_2 \frac{H'^2 + v'^2}{2}.$$

Supponiamo ora che la superficie Σ delimitante il dominio D sia sferica, con centro in un punto generico Q dello spazio, con raggio decrescente con velocità $v_0 \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_m \mu_m}}$ e $v_0 \geq |\mathbf{v} + \mathbf{v}'|$ ⁽⁶⁾; supponiamo inoltre che il valore iniziale

(4) Si ha infatti:

$$\int_D (\mathbf{E}' \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}' - \mathbf{H}' \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}') dD = \int_D \operatorname{div} (\mathbf{E}' \times \mathbf{H}') dD = \int_{\Sigma} \mathbf{E}' \times \mathbf{H}' \cdot \mathbf{n} d\Sigma.$$

Inoltre indicata con $k\alpha$ l'omografia coniugata di α :

$$Nm \frac{d\mathbf{v}'}{dP} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' = Nm k \frac{d\mathbf{v}'}{dP} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} = \frac{Nm}{2} \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} v'^2 = \frac{m}{2} [\operatorname{div} (N v'^2 \mathbf{v}) - v'^2 \operatorname{div} N \mathbf{v}]$$

$$Nm \frac{d\mathbf{v}'}{dP} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = Nm k \frac{d\mathbf{v}'}{dP} \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = \frac{m}{2} [\operatorname{div} (N v'^2 \mathbf{v}') - v'^2 \operatorname{div} N \mathbf{v}'].$$

(5) Cfr. per esempio D. GRAFFI, *Sulla teoria della propagazione del calore per convezione naturale*, « Acc. Naz. dei Lincei », vol. XII, serie 6^a (1930).

(6) Con ε_m e μ_m si sono indicati i valori minimi di ε e di μ nello spazio. Notiamo che $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_m \mu_m}}$ è dell'ordine della velocità della luce, quindi se $v_0 \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_m \mu_m}}$, sarà anche $v_0 \geq |\mathbf{v} + \mathbf{v}'|$.

Comunque v_0 esiste perché $\mathbf{v} + \mathbf{v}'$ è limitata.

R_0 di R sia sufficientemente grande in modo che fissato un istante $t < T$, sia $R(t) > R(T) = R_0 - v_0 T > 0$.

Si ha allora, posto per comodità (7):

$$(9) \quad W = \frac{\epsilon E'^2 + \mu H'^2 + Nm v'^2}{2},$$

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \int_D W dD = \int_D \frac{\partial W}{\partial t} dD - v_0 \int_{\Sigma} W d\Sigma.$$

Inoltre in base al teorema della divergenza e alle relazioni $|\mathbf{E}' \times \mathbf{H}' \cdot \mathbf{n}| \leq E' H'$, $|(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \cdot \mathbf{n}| \leq |\mathbf{v} + \mathbf{v}'| \leq v_0$ e quindi $(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \cdot \mathbf{n} + v_0 \geq 0$, si ha, ricordando che $v_0 \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon_m \mu_m}}$:

$$(11) \quad - \int_{\Sigma} \mathbf{E}' \times \mathbf{H}' \cdot \mathbf{n} d\Sigma - \frac{m}{2} \int_D \operatorname{div} [N v'^2 (\mathbf{v} + \mathbf{v}')] dD - v_0 \int_{\Sigma} \frac{\epsilon E'^2 + \mu H'^2 + Nm v'^2}{2} d\Sigma - \\ - m \int_D v N v'^2 dD \leq - \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E' - \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H' \right)^2 d\Sigma - \\ - \frac{m}{2} \int_{\Sigma} N v'^2 [(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \cdot \mathbf{n} + v_0] d\Sigma - m \int_D v N v'^2 dD \leq 0.$$

Della (5) si ha allora, considerando i valori assoluti e tenendo presenti le disuguaglianze (6), (7), (8), (11) e la (10):

$$2) \quad \frac{d}{dt} \int_D W dD \leq \int_D \left[M_2 eN \frac{\mu H'^2}{2} + \left(\frac{M_1}{N} + 2L + \frac{e\mu M_2}{m} \right) \frac{mN v'^2}{2} \right] dD \leq M \int_D W dD,$$

detto M un valore maggiorante per i numeri $M_2 eN$, $\frac{M_1}{N} + 2L + \frac{e\mu M_2}{m}$.

Integrando la (12) nell'intervallo $(0, t)$ con $t < T$, tenendo conto che per ipotesi è $\mathbf{E}' = \mathbf{H}' = \mathbf{v}' = 0$ per $t = 0$, si ha:

$$(13) \quad \int_D W dD \leq M \int_0^t \left(\int_D W dD \right) dt,$$

da cui in base al lemma di Gronwall risulta $\int_D W dD = 0$ in tutto $(0, T)$, ossia

$W = 0$ e quindi $\mathbf{E}' = \mathbf{H}' = \mathbf{v}' = 0$ in tutti punti della sfera di raggio $R_0 - v_0 T$ (in particolare in Q) e in ogni istante $0 \leq t \leq T$. Poiché Q e T sono arbitrari si ha $\mathbf{E}' = \mathbf{H}' = \mathbf{v}' = 0$ in ogni istante finito e in ogni punto dello spazio. Le due soluzioni $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{v}; \mathbf{E} + \mathbf{E}', \mathbf{H} + \mathbf{H}', \mathbf{v} + \mathbf{v}'$ del sistema formato da (1) e (2') sono pertanto coincidenti e resta dimostrato il teorema di unicità.

(7) Il secondo membro di (9) rappresenta infatti una somma di densità di energie.

3. Confrontiamo ora il sistema formato dalle (1) e (2'), in cui supponiamo N costante e $v = 0$ e per cui ammettiamo l'esistenza di soluzioni regolari, col sistema:

$$(14) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + Ne \mathbf{v}_1 + \mathbf{j} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_1, \end{cases}$$

ottenuto associando a (1) non (2'), ma (2'') con $v = 0$. Supponiamo poi inizialmente $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 = 0$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 = 0$ in tutto lo spazio. Queste condizioni determinano, per il teorema del numero precedente, che vale ovviamente anche per il sistema (14), le soluzioni dei due sistemi.

Ponendo $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$ la seconda equazione di (1) è soddisfatta se:

$$(15) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \operatorname{grad} \varphi.$$

Allora, sottraendo membro a membro la prima equazione di (14) dalla prima di (1) si ottiene:

$$\varepsilon \frac{\partial \operatorname{grad} \varphi}{\partial t} + Ne (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) = 0,$$

da cui:

$$(16) \quad \mathbf{v} - \mathbf{v}_1 = -\frac{\varepsilon}{Ne} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Applichiamo ora ad ambo i membri dell'ultima equazione di (14) l'operatore rotazionale; si ottiene:

$$\frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{v}_1}{\partial t} = \frac{e}{m} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = -\frac{e\mu}{m} \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial t};$$

integrando e tenendo conto che per le nostre ipotesi è $\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_1 = 0$ per $t = 0$, risulta:

$$(17) \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = -\frac{e\mu}{m} \mathbf{H}_1 = -\frac{e\mu}{m} \mathbf{H}.$$

Ma dalle (16) segue $\operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{v}$, quindi, ricordando che $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial P} \mathbf{v} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 + \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v}$ e l'ultima di (14), si ha che la (2') si riduce, sempre per $v = 0$, a:

$$(18) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{e}{m} \mathbf{E} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2.$$

Sostituendo in questa equazione (15) e (16) si ottiene:

$$(19) \quad \operatorname{grad} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{Ne^2}{m\varepsilon} \varphi - \frac{Ne}{2\varepsilon} v^2 \right) = 0,$$

relazione soddisfatta se:

$$(20) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{Ne^2}{m\varepsilon} \varphi - \frac{Ne}{2\varepsilon} v^2 = 0.$$

Ricordiamo che nelle nostre ipotesi è $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 = 0$ per $t = 0$, segue allora per le (15) e (16) φ e $\partial\varphi/\partial t$ uguali per $t = 0$ a valori costanti che potremo supporre uguali a zero. Dalla (20) si ha pertanto ⁽⁸⁾:

$$(21) \quad \varphi(P, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Nme^2}{\varepsilon}} \int_0^t \sin \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon}} (t - \tau) v^2(P, \tau) d\tau.$$

Concludendo: le equazioni (1) e (2') e le condizioni iniziali sono soddisfatte ponendo:

$$(22) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \text{grad } \varphi, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \frac{\varepsilon}{Ne} \text{grad } \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

con φ data da (21). Risulta quindi provato quanto affermato nell'introduzione.

È da notare che φ risulta espressa mediante v^2 , funzione incognita di φ ; $\mathbf{v}$ è determinata dalle nostre equazioni, ma non si conosce la sua espressione esplicita, quindi non si può esprimere esplicitamente φ . Però, poiché è presumibile che sia $\mathbf{v}$ poco diverso da $\mathbf{v}_1$, si può ottenere un valore approssimato di φ sostituendo nella (21) $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}$. Del resto sostituendo nella (20) la (16) si avrebbe una equazione a derivate parziali che determina la φ .

Si noti infine che non è necessario che per $t = 0$ risultino nulle le condizioni iniziali per (1) e (2') e per (14). Le nostre considerazioni restano valide purché si supponga per $t = 0$ $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ e si supponga, sempre per $t = 0$:

$$\text{rot } \mathbf{v} = -\frac{e\mu}{m} \mathbf{H}.$$

(8) È infatti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \frac{Ne^2}{2\varepsilon} \int_0^t \cos \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon}} (t - \tau) v^2(P, \tau) d\tau \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\sqrt{\frac{Ne^2m}{\varepsilon}} \frac{Ne^2}{2m\varepsilon} \int_0^t \sin \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon}} (t - \tau) v^2(P, \tau) d\tau + \frac{Ne^2}{2\varepsilon} v^2(P, t) \end{aligned}$$

e sostituendo in (20) si ottiene un'identità.