
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIANNANTONIO PEZZOLI

**Onde d'emersione e d'impulso a simmetria centrale.
Soluzione rigorosa del problema di Cauchy-Poisson
con energia finita**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 38 (1965), n.6, p. 851–859.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_6_851_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Idrodinamica. — *Onde d'emersione e d'impulso a simmetria centrale. Soluzione rigorosa del problema di Cauchy-Poisson con energia finita.* Nota di GIANNANTONIO PEZZOLI, presentata (*) dal Corrisp. G. SUPINO.

1. In altra Nota [1] è stata esposta e rielaborata la teoria delle onde provocate alla superficie di un liquido in quiete da assegnate configurazioni iniziali del pelo libero o da distribuzioni di impulso parimenti assegnate nel caso di moto piano. Nella Nota citata è stata data per la prima volta una soluzione esatta del problema, per un'onda iniziale avente energia finita.

Nella presente Nota ci si riferisce invece alla propagazione a simmetria centrale (*ring waves*) e si riporta anche qui innanzi tutto la soluzione classica di Cauchy e Poisson [2], [3], ripresa in tempi più recenti da Hinze [4].

Il problema riguarda la propagazione con moto irrotazionale, alla superficie di un liquido perfetto inizialmente in quiete, di una perturbazione generata da un cilindretto fluido di base infinitesima e altezza infinita (e quindi avente anche energia potenziale infinita) ma di volume unitario, posto nell'origine degli assi, mentre il pelo libero restante è dovunque orizzontale. Le onde sono studiate per profondità dell'acqua $\rightarrow \infty$.

Per quanto sopra detto, dovrà esistere un potenziale φ di velocità che sarà necessariamente una funzione armonica; si avrà cioè

$$(1) \quad \Delta_2 \varphi = 0$$

e trattandosi di un problema simmetrico rispetto al centro sarà:

$$(2) \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

r essendo il raggio vettore e y l'asse verticale contato positivamente verso l'alto. La condizione alla superficie è notoriamente

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (\text{per } y = 0)$$

mentre la soprelevazione dell'onda al tempo t , indicata con η , è espressa da

$$(4) \quad \eta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{y=0}.$$

La soluzione particolare tipica per questo caso è (vedi ad esempio [5]):

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi = g \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} \cdot J_0(kr) \\ \eta = \cos \sigma t \cdot J_0(kr) \end{cases}$$

(*) Nella seduta del 17 giugno 1965.

essendo

$$(6) \quad \sigma^2 = gk, \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

g l'accelerazione di gravità e J_0 la funzione di Bessel di prima specie d'ordine 0.

La soluzione particolare (5) non soddisfa alle condizioni iniziali imposte dal problema, ma data la linearità delle equazioni è possibile, analogamente al caso piano, sommare infinite soluzioni del tipo (5) con un integrale di Fourier-Bessel per soddisfare alle condizioni richieste.

Ricorriamo al teorema di Fourier-Bessel che possiamo qui scrivere:

$$(7) \quad f(r) = \int_0^\infty \left[J_0(kr) k dk \int_0^\infty f(a) J_0(ka) a da \right].$$

In corrispondenza alle condizioni iniziali

$$(8) \quad \eta = f(r) \quad \text{per } t = 0$$

si ottiene

$$(9) \quad \begin{cases} \varphi = g \int_0^\infty \left[\frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} J_0(kr) k dk \int_0^\infty f(a) J_0(ka) a da \right] \\ \eta = \int_0^\infty \left[\cos \sigma t \cdot J_0(kr) k dk \int_0^\infty f(a) J_0(ka) a da \right]. \end{cases}$$

Se la sovrapposizione iniziale è concentrata nell'intorno dell'origine, dovendo essere

$$(10) \quad \int_0^\infty f(a) \cdot 2\pi a da = 1$$

le (9) divengono:

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{g}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} \cdot J_0(kr) k dk \\ \eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \cos \sigma t \cdot J_0(kr) k dk. \end{cases}$$

Come già è stato fatto nel caso di moto piano, studiamo l'espressione di η che maggiormente interessa.

A questo scopo, nella 2^a delle (11), sviluppiamo in serie il coseno, e ricordiamo che dalla teoria delle funzioni di Bessel [6], risulta che

$$(12) \quad \int_0^\infty J_0(kr) k^n dk = \frac{n!}{r^{n+1}} P_n(0)$$

dove P_n è il polinomio di Legendre di ordine n . Tenendo ancora presente le relazioni

$$(13) \quad \begin{cases} P_{2m+1}(0) = 0 \\ P_{2m}(0) = (-1)^m \frac{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2m} \end{cases}$$

ne deriva immediatamente:

$$(14) \quad \eta = \frac{1}{2\pi r^2} \left[\frac{1^2}{2!} \left(\frac{gt^2}{r} \right) - \frac{1^2 \cdot 3^2}{6!} \left(\frac{gt^2}{r} \right)^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{10!} \left(\frac{gt^2}{r} \right)^5 \cdots \right]$$

La serie

$$(15) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{[(2n+1)!!]^2}{[2(2n+1)]!} \left(\frac{gt^2}{r} \right)^{2n+1}$$

che compare a secondo membro della (14) non risulta di possibile espressione per mezzo di trascendenti note, tuttavia essa risolve il problema posto.

La perturbazione così studiata, è generata, come già si è detto, da una soprelevazione iniziale che possiede energia infinita.

Per passare al caso di un'intumescenza che per $t = 0$ abbia volume finito ed energia finita, si dovrà ancora ricorrere alle (7), (8), e (9), ricordando però che in questa situazione è, per $t = 0$:

$$(16) \quad \begin{cases} f(r) = A & \text{per } r \leq \delta \\ f(r) = 0 & \text{per } r > \delta \end{cases}$$

essendo δ il raggio del cilindretto di altezza finita A (avente quindi energia potenziale finita) che costituisce la perturbazione all'origine dei tempi.

Assumendo la detta perturbazione unitaria, sarà inoltre:

$$(17) \quad \int_0^{\delta} A \cdot 2\pi a da = 1$$

cioè

$$(18) \quad A = \frac{1}{\pi \delta^2}.$$

Dalla 2^a delle (9), l'espressione di η si riduce quindi a:

$$(19) \quad \eta = \frac{1}{\pi \delta^2} \int_0^{\infty} \left[\cos \sigma t \cdot J_0(kr) k dk \int_0^{\delta} J_0(ka) a da \right].$$

La teoria delle funzioni di Bessel fornisce però la nota formula

$$(20) \quad \int a J_0(ka) da = \frac{a}{k} J_1(ka)$$

per cui la (19) diviene:

$$(21) \quad \eta = \frac{1}{\pi \delta} \int_0^{\infty} \cos \sigma t \cdot J_0(kr) \cdot J_1(k\delta) dk$$

essendo J_1 la funzione di Bessel di prima specie di ordine 1; passando al limite per $\delta \rightarrow 0$ nella (21) si ritrova la 2^a delle (11).

Sviluppando in serie la $J_1(k\delta)$ nella (21), si ottiene:

$$(22) \quad \eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos \sigma t \cdot J_0(kr) \cdot k \left[1 - \frac{1}{1!2!} \left(\frac{k\delta}{2} \right)^2 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{k\delta}{2} \right)^4 \dots \right] dk$$

ma il primo termine non è altro che la soluzione (14) che qui riportiamo indicandola con η_1 :

$$(23) \quad \eta_1 = \frac{1}{2\pi r^2} \left(\frac{1^2}{2!} z - \frac{1^2 \cdot 3^3}{6!} z^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{10!} z^5 \dots \right)$$

avendo posto $z = \frac{gt^2}{r}$.

Questa si può scrivere anche:

$$(24) \quad \eta_1 = \frac{1}{2\pi r^2} F(z)$$

essendo $F(z)$ uguale alla serie che compare nella (24) ed anche uguale a:

$$(25) \quad F(z) = \int_0^{\infty} r^2 \cos \sigma t \cdot J_0(kr) \cdot k dk.$$

Se ora si deriva la $F(z)$ data dalla precedente formula quattro volte rispetto a t , essendo dalla (6) $\sigma^2 = gk$, si osserva subito che si ottiene, a meno di un fattore moltiplicativo, il secondo termine η_2 della serie (22), essendo notoriamente

$$(26) \quad \frac{d}{dt} = \frac{d}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{2gt}{r} \frac{d}{dz}.$$

Si ha in definitiva:

$$(27) \quad \eta_2 = \frac{1}{2\pi r^2} \left[- \frac{1}{1!2!} \left(\frac{2\delta}{r} \right)^2 z^2 F^{IV} \right],$$

dove gli apici apposti a F indicano derivazione rispetto a z .

Proseguendo allo stesso modo si ottiene la soluzione della (22) nella forma

$$(28) \quad 2\pi r^2 \cdot \eta = F(z) - \frac{z^2}{1!2!} \left(\frac{2\delta}{r} \right)^2 F^{IV}(z) + \frac{z^4}{2!3!} \left(\frac{2\delta}{r} \right)^4 F^{(8)}(z) \dots$$

Ponendo ora

$$(29) \quad \Phi(z) = \int_0^z dz \int_0^z F(z) dz$$

e

$$(30) \quad \beta = \frac{2\delta}{r}$$

la (28) si trasforma facilmente nella:

$$(31) \quad 2\pi r^2 \cdot \eta = \frac{1}{\beta z} \left[\frac{\beta z}{0!1!} \Phi''(z) - \frac{\beta^3 z^3}{1!2!} \Phi^{(6)}(z) + \frac{\beta^5 z^5}{2!3!} \Phi^{(10)}(z) \dots \right]$$

che indicando con D l'operatore di derivazione rispetto a z , $(d/dz) = D$, consente di scrivere la (31) nella forma compatta

$$(32) \quad 2\pi r^2 \cdot \eta = \frac{1}{\beta z} [J_1(2\beta z D^2)] \Phi.$$

Sfortunatamente, allo stato attuale delle cose, non pare semplice valutare l'operatore che compare nella (32), per cui occorre calcolare la soluzione per serie a partire dalla (28), ponendo al posto di $F(z)$ la sua espressione ricavata dalle (23), (24).

Eseguito materialmente il calcolo, si giunge all'espressione che dà la soluzione per serie del nostro problema; è:

$$(33) \quad 2\pi r^2 \cdot \eta = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \left(\frac{gt^2}{r} \right)^{2n+1}$$

e i coefficienti A_{2n+1} sono dati da:

$$(34) \quad A_{2n+1} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{[(2n+2k+1)!!]^2 (2n+2k+1)!}{(4n+4k+2)!(2n-2k+1)!k!(k+1)!} \left(\frac{2\delta}{r} \right)^{2k} (1)$$

(1) Per il calcolo dei coefficienti A_{2n+1} , quando n è un po' grande conviene usare per la valutazione dei fattoriali la nota formula asintotica di Stirling

$$(a) \quad n! = \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Per calcolare i semifattoriali invece, non mi risulta esistano formule analoghe.

Indicando con p un generico numero pari, è:

$$p!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot p = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \frac{p}{2} \cdot 2^{p/2}$$

cioè:

$$(b) \quad p!! = \frac{p}{2}! 2^{p/2}$$

per cui sostituendo nella (b) il valore di $p/2!$ dato da (a), si ottiene la formula asintotica

$$(c) \quad p!! = \left(\frac{p}{e} \right)^{p/2} \sqrt{\pi p}.$$

Analogamente indicando con d un generico numero dispari, è:

$$d!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot d$$

da cui

$$d!!(d+1)!! = d!$$

Ma $d+1$ è un numero pari, per cui valuteremo il suo semifattoriale con la (c) mentre il fatto-

Si può osservare dall'esame della (34) che la serie (33) converge assolutamente e la sua convergenza è così rapida che bastano pochi termini per valutare con buona approssimazione la soluzione data almeno fino a che z non è molto grande; a questo scopo si riportano per esteso i primi coefficienti A:

$$(35) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{1}{2} \\ A_3 = -\left[\frac{1}{80} + \frac{5}{1344}\left(\frac{2\delta}{r}\right)^2\right] \\ A_5 = \frac{1}{16 \cdot 128} + \frac{35}{658 \cdot 944}\left(\frac{2\delta}{r}\right)^2 + \frac{21}{4 \cdot 978 \cdot 688}\left(\frac{2\delta}{r}\right)^4 \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Tuttavia, l'impiego del metodo della « fase stazionaria » di Lord Kelvin [7], consente di ottenere due formule asintotiche per valori di $z \rightarrow \infty$ e per valori di $z \rightarrow 0$.

I giapponesi Unoki e Nakano [8] lo hanno utilizzato per ottenere una soluzione asintotica per $z \rightarrow \infty$ nel caso di un impulso distribuito uniformemente su di un'area circolare con centro nell'origine, mettendo in conto approssimativamente anche la viscosità.

Il lavoro, pur corretto dal punto di vista matematico, è di scarso interesse dal punto di vista fisico, dato che non sembra molto coerente partire con un'onda avente energia iniziale infinita (vedi [1] e [9]) e poi cercare di attenuarla introducendo la viscosità.

Riprendendo il metodo di Lord Kelvin, senza entrare nei dettagli della sua dimostrazione, peraltro notissima, si ricorda che l'autore citato riconduce la valutazione di un integrale definito del tipo

$$(36) \quad u = \int_a^b \varphi(x) e^{if(x)} dx$$

riale di d sarà dato da (a); il calcolo semplicissimo porge:

$$(e) \quad d!! = \left(\frac{d+1}{e}\right)^{(d+1)/2} \sqrt{2}$$

che si può scrivere nella forma

$$d!! = \left[\left(\frac{d}{e}\right)^d \left(1 + \frac{1}{d}\right)^{d \cdot 1/2} \left(\frac{d+1}{e}\right)^{1/2} \sqrt{2}\right].$$

Ricordando ora che d deve essere abbastanza grande e che è:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{d}\right)^d = e$$

la formula (e) diviene

$$(f) \quad d!! = \left(\frac{d}{e}\right)^{d/2} \sqrt{2d}$$

avendo trascurato sotto radice 1 in confronto a d .

Le formule (c) ed (f) risolvono il particolare problema posto,

all'espressione:

$$(37) \quad u = \sqrt{2\pi} \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{|f''(\alpha)|}} e^{i\left[f(\alpha) \pm \frac{\pi}{4}\right]}$$

dove α è l'unica radice dell'equazione

$$(38) \quad f'(x) = 0$$

compresa nell'intervallo a, b .

Se le radici della (38) comprese nell'intervallo di integrazione sono più di una, alla (37) si sostituisce una somma di termini dello stesso tipo, ciascuno relativo ad una radice α_i della (38). Nell'esponente della (37) infine, va preso il segno più o il meno a seconda che $f''(\alpha)$ è positiva o negativa.

Applichiamo il procedimento indicato alla valutazione dell'integrale (21).

$$(21) \quad \eta = \frac{1}{\pi\delta} \int_0^\infty \cos \sqrt{gk} t \cdot J_0(kr) \cdot J_1(k\delta) dk$$

nei due casi $kr \rightarrow \infty$ e $kr \rightarrow 0$.

Per $kr \rightarrow \infty$ si ha notoriamente:

$$(39) \quad J_0(kr) \simeq \sqrt{\frac{2}{kr\pi}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right),$$

per cui la (21) diventa

$$(40) \quad \eta = \frac{1}{2\pi\delta} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{kr\pi}} J_1(k\delta) \left[\cos\left(\sqrt{gk} t - kr + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\sqrt{gk} t + kr - \frac{\pi}{4}\right) \right] dk.$$

Il secondo termine entro parentesi quadra non dà contributo all'integrale in quanto la derivata dell'argomento del coseno non ha radici positive: si ha:

$$(41) \quad \begin{cases} f(k) = \sqrt{gk} t - kr + \frac{\pi}{4} \\ f'(k) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} t - r. \end{cases}$$

L'equazione $f'(k) = 0$ dà l'unica radice

$$(42) \quad k = \alpha = \frac{gt^2}{4r^2}$$

per cui la (40) diviene, applicando la (37) e prendendo la sola parte reale della formula:

$$(43) \quad \eta = \frac{\sqrt{2}}{\pi\delta r} J_1\left(\frac{gt^2}{4r} \cdot \frac{\delta}{r}\right) \cos \frac{gt^2}{4r}.$$

La condizione assegnata $kr \rightarrow \infty$ equivale quindi a $\frac{gt^2}{r} \rightarrow \infty$.

Per $kr \rightarrow 0$ si può invece usare l'artificio seguente; lo sviluppo in serie di $J_0(kr)$, arrestato ai termini del secondo ordine, vale:

$$(44) \quad J_0(kr) = 1 - \frac{k^2 r^2}{4} \dots$$

e questo coincide, con un'approssimazione limitata ai termini dello stesso ordine, con lo sviluppo del $\cos kr/\sqrt{2}$:

$$(45) \quad \cos \frac{kr}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{k^2 r^2}{4} \dots$$

Nella (21) sostituiremo quindi, al posto di $J_0(kr)$, $\cos kr/\sqrt{2}$, ottenendo:

$$(46) \quad \eta \simeq \frac{1}{\pi \delta} \int_0^\infty \cos \sqrt{gk} t \cdot \cos \frac{kr}{\sqrt{2}} \cdot J_1(k\delta) dk.$$

Si ha ancora:

$$(47) \quad \eta \simeq \frac{1}{2\pi\delta} \int_0^\infty J_1(k\delta) \left[\cos \left(\sqrt{gk} t - \frac{kr}{\sqrt{2}} \right) + \cos \left(\sqrt{gk} t + \frac{kr}{\sqrt{2}} \right) \right] dk$$

e nella formula precedente non va considerato il secondo termine fra parentesi quadre per le ragioni già viste.

Procedendo come per il primo caso si ottiene:

$$(48) \quad \begin{cases} f(k) = \sqrt{gk} t - \frac{kr}{\sqrt{2}} \\ f'(k) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} t - \frac{r}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

e la condizione $f'(k) = 0$ fornisce

$$(49) \quad k = \alpha = \frac{gt^2}{2r^2}$$

per cui l'applicazione della (37) dà ora:

$$(50) \quad \eta \simeq \frac{2^{3/4}}{\sqrt{\pi} \delta r} \left(\frac{gt^2}{4r} \right)^{1/2} \cdot J_1 \left(\frac{gt^2}{4r} \cdot \frac{2\delta}{r} \right) \cos \left[\sqrt{2} \left(\frac{gt^2}{4r} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \right) \right].$$

Anche qui la condizione $kr \rightarrow 0$ equivale alla $\frac{gt^2}{r} \rightarrow 0$.

Ritengo che la trattazione esposta sia completamente originale, e tanto la soluzione esatta del caso presente, quanto le formule asintotiche (43) e (50) siano state qui assegnate per la prima volta.

Non si insiste sull'ottenimento della soluzione per un impulso finito unitario distribuito uniformemente su di un cerchio con centro nell'origine, perché, come già si è detto, è un problema ad energia iniziale infinita, e come si è visto in [1] è sempre possibile ottenere il risultato applicando alla presente soluzione l'operatore $\frac{1}{g\rho} \frac{\partial}{\partial t}$, essendo ρ la densità del liquido.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. PEZZOLI, *Sulla teoria delle onde d'emersione e d'impulso. Una soluzione rigorosa ad energia finita del problema di Cauchy e Poisson per moto piano*, questi « Rend. », vol. XXXVIII, fasc. 5, pp. 660-669 (1965).
- [2] A. CAUCHY, *Mémoires sur la théorie des ondes*, « Mém. de l'Acad. roy. des Sciences » (1827).
- [3] S. D. POISSON, *Mémoire sur la théorie des ondes*, « Mém. de l'Acad. roy. des Sciences » (1816).
- [4] J. O. HINZE, *Die Erzeugung von Ringwellen auf einer Flüssigkeitsoberfläche durch periodisch wirkende Druckkräfte*, « Zeitschrift für ang. Math. und Mech. », Bd. 16 (1936).
- [5] H. LAMB, *Hydrodynamics*, Cambridge, sixth edition.
- [6] G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge - University Press (1952).
- [7] W. THOMSON (Lord Kelvin), *On the waves produced by a single impulse in water of any depth, or in a dispersive medium*, Papers (1887).
- [8] S. UNOKI, M. NAKANO, *On the Cauchy-Poisson waves caused by the eruption of a submarine volcano*, « Oceanographical Magazine », n° 3 paper (1953).
- [9] J. J. STOKER, *Water waves*, Interscience publishers (1957).