Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Orazio Sorace

Fibrazioni proiettive legate alla rappresentazione geometrica dei nullifici di certe algebre

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.6, p. 838–843.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_6_838_0>

Geometria. — *Fibrazioni proiettive legate alla rappresentazione geometrica dei nullifici di certe algebre* (*). Nota di ORAZIO SORACE, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

1. Fissato un campo γ, non perfetto, di caratteristica $p > 0$, sia δ un campo ottenibile da γ mediante un'estensione commutativa, semplice, p u r a m e n t e i n s e p a r a b i l e di grado $n = p^e$, essendo e un intero positivo. In questo lavoro si studia anzitutto la struttura dell'algebra relativa ad una tale estensione algebrica e la rappresentazione geometrica dei suoi nullifici. Indi, collegando, come ha fatto B. Segre [1] nel caso delle estensioni separabili, tale rappresentazione geometrica con il problema delle fibrazioni proiettive di uno spazio, si dà una c a r a t t e r i z z a z i o n e p r o i e t t i v a del relativo sistema grafico elementare.

2. Sia α un elemento di γ che non sia potenza p^{ma} di alcun elemento del campo stesso. Il campo δ risulta isomorfo al campo $\gamma(\theta)$ ottenuto da γ con l'aggiunzione simbolica di una indeterminata θ soggetta all'equazione inseparabile $x^n - \alpha = 0$, la quale, poiché è $\theta^n = \alpha$, in δ può venir scritta nella seguente maniera: $(x - \theta)^n = 0$.

Sia $\varkappa$ un campo arbitrario contenente δ come sottocampo. Chiameremo algebra su $\varkappa$, relativa alla estensione puramente inseparabile δ/γ, l'algebra $\mathfrak{A}$ associativa e commutativa, di ordine n, dei polinomi su $\varkappa$ nella indeterminata X, cioè l'algebra costituita dagli elementi

$$\xi = x[\mathrm{X}] = x_1 + x_2 \mathrm{X} + \cdots + x_n \mathrm{X}^{n-1} \qquad (x \in \varkappa) \tag{1}$$

con la regola di semplificazione dei prodotti: $\mathrm{X}^n = \alpha$. La sottoalgebra $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ costituita dagli elementi ξ, ottenuti dalla (1), dando alle x valori in γ, è manifestamente isomorfa a δ.

Faremo corrispondere al sistema semplice (ξ), cioè ad ogni elemento $c\xi$ con $c \neq 0$ in $\varkappa$, il punto di un S_{n-1} proiettivo su $\varkappa$ avente le coordinate proiettive omogenee $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Consideriamo ora due serie di indeterminate $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$. Se poniamo $\eta = y[\mathrm{X}]$, risulta $\xi\eta = \psi_j(x|y)\,\mathrm{X}^{j-1}$ (nel secondo membro sottintendiamo la somma per $j = 1, 2, \cdots, n$), ove:

$$\left\{\begin{aligned} \psi_1 &= x_1 y_1 + \alpha x_n y_2 + \alpha x_{n-1} y_3 + \cdots + \alpha x_2 y_n \\ \psi_2 &= x_2 y_1 + x_1 y_2 + \alpha x_n y_3 + \cdots + \alpha x_3 y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_n &= x_n y_1 + x_{n-1} y_2 + x_{n-2} y_3 + \cdots + x_1 y_n . \end{aligned}\right. \tag{2}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di Ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 17 giugno 1965.

Sia $\Delta(x)$ la matrice formata con i coefficienti delle y in tali forme. Gli elementi ξ ed η si chiamano mutuamente nullifici od ortogonali se, essendo $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$, risulta $\xi\eta = 0$. Affinché $\xi \neq 0$ sia un nullifico, occorre e basta che sia det $\Delta(x) = 0$; e si chiama rango del nullifico ξ il rango $k\,(1 \leq k \leq n-1)$ della matrice $\Delta(x)$, mentre il numero $n-k$, eguale all'ordine della sottoalgebra di $\mathfrak{A}$ formata dallo zero e da tutti gli elementi ortogonali a ξ, chiamasi indice o nullità di ξ.

La matrice $\Delta(x)$ coincide, a meno di un opportuno scambio di righe e colonne, con la matrice risultante bézoutiana dei polinomi ξ ed $X^n - \alpha$. Poiché quest'ultimo polinomio ha θ come unica radice, e poiché condizione necessaria e sufficiente affinché due polinomi abbiano un divisore comune di grado $n-k$, e non più, è che la loro matrice bézoutiana abbia rango k, possiamo concludere che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché un nullifico abbia rango k è che esso ammetta θ come radice di molteplicità $n-k$.

Il luogo dei punti rappresentativi dei nullifici è l'iperpiano di S_{n-1} di equazione

$$x_1 + x_2\,\theta + \cdots + x_n\,\theta^{n-1} = 0\,. \tag{3}$$

Chiamiamo $V^{(0)}$ tale iperpiano, e $V^{(m)}$ $(1 \leq m \leq n-2)$ l'iperpiano rappresentato dall'equazione che si ottiene derivando la (3) m volte rispetto a θ. Chiamiamo poi O_{k-1} lo spazio, di dimensione $k-1$, intersezione degli iperpiani $V^{(0)}, V^{(1)}, \cdots, V^{(n-k-1)}$. Gli $n-1$ spazi O_{k-1} $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$ costituiscono una bandiera nell'iperpiano $V^{(0)} \equiv O_{n-2}$. Per quanto sopra esposto, si ha quindi che:

Il punto rappresentativo dei nullifici di rango uno è O_0. Il luogo dei punti rappresentativi dei nullifici di rango k $(2 \leq k \leq n-1)$ è lo spazio O_{k-1} privato dei punti di O_{k-2}. Chiameremo O'_{k-1} tale luogo.

3. Consideriamo il nullifico (che chiamiamo elementare) di rango k

$$\zeta_k = (\theta - X)^{n-k} \qquad (1 \leq k \leq n-1).$$

Il luogo dei punti rappresentativi del sistema $(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_k)$ è O_{k-1}. Tale luogo è infatti lo spazio congiungente i punti indipendenti $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_k$ di O_{k-1}.

Osserviamo ora che

$$(\theta - X)^n = \alpha - X^n = 0\,, \tag{4}$$

e quindi $X(\theta - X)^{n-1} = \theta(\theta - X)^{n-1}$; sicché, per qualunque $\xi = x[X]$, risulta:

$$\xi\zeta_1 = (x_1 + x_2\,\theta + \cdots + x_n\,\theta^{n-1})\,\zeta_1 = x[\theta]\,\zeta_1\,. \tag{5}$$

Ogni nullifico di rango k è del tipo $\lambda_1\zeta_1 + \lambda_2\zeta_2 + \cdots + \lambda_k\zeta_k$, essendo le $\lambda \in x$ e $\lambda_k \neq 0$. La (4) implica $\zeta_h\zeta_k = 0$ se $h + k \leq n$, eppertanto:

Il luogo dei punti rappresentativi dei nullifici ortogonali ad un assegnato nullifico di rango k è O_{n-k-1}. Sono autonullifici quei nullifici il cui rango k soddisfa alla

$$2k \leq n. \tag{6}$$

Ogni nullifico è nilpotente e viceversa.

Infatti, per la (4), un qualunque nullifico elementare ζ_k, e quindi ogni nullifico, è nilpotente; anzi, essendo l'algebra $\mathfrak{A}$ commutativa, è propriamente nilpotente e quindi [2] possiamo concludere che:

Il radicale dell'algebra $\mathfrak{A}$ è costituito dallo zero e dal sistema d'ordine $n-1$ dei suoi nullifici.

4. Eguagliando a zero le $\psi_j(x|y)$, date dalle (2), si ottengono [1] n reciprocità involutorie indipendenti, rispetto a ciascuna delle quali sono coniugati due punti ortogonali ξ, η di S_{n-1}. Per $\xi = \eta$ otteniamo n forme quadratiche indipendenti $\varphi_j(x) = \psi_j(x|x)$. Supporremo nel seguito $p \neq 2$. La (6) porge allora $k \leq (n-1)/2$. Concludiamo che:

Il sistema lineare ∞^{n-1} di quadriche determinato dalle $\varphi_j(x) = 0$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ ammette lo spazio $O_{(n-3)/2}$ come base. In un punto di tale spazio, che abbia rango k $(k = 1, 2, \cdots, (n-1)/2)$, lo spazio O_{n-k-1} risulta tangente a tutte le quadriche del sistema lineare.

5. Uno dei «modelli» trovati da B. Segre [1] per descrivere la geometria algebrica in uno spazio S_{r-1} $(r \geq 2)$ lineare sopra un campo δ, estensione algebrica di grado n di un dato campo γ, senza uscire dal campo γ, è costituito da un sistema Σ, da lui chiamato s i s t e m a g r a f i c o e l e m e n t a r e, di spazi S'_{n-1} lineari sopra γ, che f i b r a n o uno spazio S'_{s-1} $(s = nr)$, anche esso lineare sopra γ. In [1] tale sistema Σ viene caratterizzato proiettivamente mediante n s p a z i d i r e t t o r i (cui si appoggiano i suoi S'_{n-1}), associati alle n radici distinte dell'equazione minima dell'estensione algebrica separabile δ/γ.

Nel caso, qui considerato, che l'estensione δ/γ sia puramente inseparabile, gli n spazi direttori vengono a coincidere; ma il sistema Σ verrà altrimenti caratterizzato.

Ci riferiremo all'algebra $\mathfrak{A}'$ su γ, relativa all'estensione δ/γ. Faremo corrispondere ad ogni r-pla $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ di elementi non tutti nulli di $\mathfrak{A}'$, definiti a meno di un comune fattore scalare (elemento non nullo arbitrario di γ), quel punto dell'S'_{s-1} su γ le cui coordinate omogenee siano – in un ordine comunque fissato – le loro s componenti, che chiamiamo $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$. Per ogni scelta, fatta a meno di uno stesso fattore, elemento non nullo arbitrario di $\mathfrak{A}'$, di r elementi $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, non tutti nulli di $\mathfrak{A}'$, ed al variare del parametro $\tau = t_1 + t_2 X + \cdots + t_n X^{n-1}$ in $\mathfrak{A}'$, le $\xi_i = \alpha_i \tau$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ (quando si uguaglino le componenti omonime dei due membri) porgono le equazioni parametriche di un S_{n-1} di S'_{s-1}. Il sistema Σ di S_{n-1}, così definiti al variare delle α, costituisce una f i b r a z i o n e di

S'_{s-1}; cioè, per ogni punto $P^*(\xi^*_1, \xi^*_2, \cdots, \xi^*_r)$ di S'_{s-1}, passa uno ed un sol S_{n-1} di Σ, di equazioni

$$\xi_i = \xi^*_i \tau \qquad (i = 1, 2, \cdots, r). \tag{7}$$

Al fine di caratterizzare proiettivamente il sistema Σ, è opportuno ampliare S'_{s-1} in uno spazio S_{s-1} avente come campo base l'estensione δ del campo base γ di S'_{s-1}. Ci riferiamo poi all'algebra $\mathfrak{A}$ su δ relativa all'estensione δ/γ. Le (7), fissati gli elementi non tutti nulli $\xi^*_i \in \mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$, al variare di $\tau \neq 0$ in $\mathfrak{A}$, sono le equazioni di un S_{n-1} ampliato di Σ; questo risulta così un S_{n-1} rappresentativo dell'algebra $\mathfrak{A}$, in quanto i suoi punti sono posti in corrispondenza omografica, definita su γ, con i punti di un S_{n-1}, che chiamiamo π, in cui rappresentiamo gli elementi $\tau \in \mathfrak{A}$ nel modo specificato al n. 2.

In un S_{n-1} di Σ, l'immagine del nullifico di rango uno $\zeta_1 = (\theta - X)^{n-1}$ è il punto P_1 di coordinate $\xi^*_i \zeta_1$, cioè, per la (5), di coordinate $\lambda_i \zeta_1$, essendo

$$\lambda_i = x^*_{i1} + x^*_{i2}\theta + \cdots + x^*_{in}\theta^{n-1} = x^*_i[\theta] \qquad (i = 1, 2, \cdots, r) \tag{8}$$

r elementi di δ non tutti nulli. Al variare dei parametri $l_i \in \delta$, non tutti nulli, le equazioni $\xi_i = l_i \zeta_1$ ci dànno uno spazio subordinato di S_{s-1}, avente dimensione $r - 1$ e che designamo con T_{r-1}, su cui giace il punto P_1 relativo a ciascun S_{n-1} di Σ. Dalle (7) si ha poi $\xi_i \zeta_1 = \xi^*_i \tau \zeta_1$, cioè, per la (5),

$$x_i[\theta]\zeta_1 = \lambda_i (t_1 + t_2\theta + \cdots + t_n\theta^{n-1})\zeta_1 .$$

Ne consegue che l'iperpiano ω di un S_{n-1} di Σ passante per P_1 e corrispondente all'iperpiano di π, di equazione $t_1 + t_2\theta + \cdots + t_n\theta^{n-1} = 0$, luogo dei rappresentativi dei nullifici di $\mathfrak{A}$, giace nello spazio T_{s-r-1} di dimensione $s - r - 1$, che contiene T_{r-1} ed ha le equazioni $x_i[\theta] = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$. Poiché le λ_i, date dalle (8), non possono essere tutte nulle, *il punto* P^* *non appartiene a* T_{s-r-1}.

Poiché ζ_1 è autonullifico, le coordinate ξ_i di P_1 devono soddisfare alle $\xi_i^2 = 0$. Essendo (ved. n. 4)

$$\xi_i^2 = \varphi_1(x_i) + \varphi_2(x_i)X + \cdots + \varphi_n(x_i)X^{n-1} \qquad (i = 1, 2, \cdots, r),$$

si deduce che T_{r-1} è comune alle s quadriche

$$\varphi_j(x_i) = 0 ; \tag{9}$$

qui, e nel seguito, l'indice j prende i valori $1, 2, \cdots, n$ e l'indice i i valori $1, 2, \cdots, r$.

Gli iperpiani polari rispetto a queste quadriche di un dato punto $P'(\xi'_1, \xi'_2, \cdots, \xi'_r)$ sono rappresentati da

$$\xi'_i \xi_i = 0 ; \tag{10}$$

hanno cioè l'equazione $\psi_j(x'_i \mid x_i) = 0$. Un punto di T_{r-1} ha le coordinate $l_i \zeta_1$ e, per $\xi'_i = l_i \zeta_1$, la (10) diventa $x_i[\theta]\zeta_1 = 0$; quindi, fissato un valore di i, le n

quadriche (9) hanno in ciascun punto di T_{r-1} lo stesso iperpiano tangente, quello di equazione $x_i[\theta] = 0$. Ne segue che: T_{s-r-1} *è tangente comune alle* s *quadriche* (9) *in ciascun punto di* T_{r-1}.

Poiché è

$$\xi_i^n = x_{i1}^n + x_{i2}^n \alpha + \cdots + x_{in}^n \alpha^{n-1} = (x_i [\theta])^n ,$$

dalle (7) ricaviamo $\xi_i^{*\,n-2} \xi_i^2 = \lambda_i^n \tau^2$. Ne discende che, in un S_{n-1} di Σ, le quadriche corrispondenti alle n quadriche di π rappresentate da $\tau^2 = 0$ sono quelle in cui tale S_{n-1} sega le quadriche rappresentate da

$$\xi_i^{*\,n-2} \xi_i^2 = 0 , \tag{11}$$

cioè le quadriche:

$$\mu_j (x_i) = \psi_j (\sigma (x_i^*) \mid \varphi (x_i)) = 0 ,$$

essendo le $\sigma_j (x_i^*)$ le componenti di $\xi_i^{*\,n-2}$.

Fissato un valore di i, chiamiamo U_i e V_i le trasformazioni cremoniane tra i punti di S_{s-1} in sè così definite:

$$(U_i) \begin{cases} x'_{ij} = \varphi_j (x_i) \\ x'_{sj} = x_{sj}\, x_i [\theta] \end{cases} \quad ; \quad (V_i) \begin{cases} x'_{ij} = \sigma_j (x_i) \\ x'_{sj} = x_{sj} (x_i [\theta])^{n-3} \end{cases}$$

$$(s = 1 , 2 , \cdots , r \; ; \; s \neq i).$$

Le equazioni delle inverse di U_i e V_i sono

$$(U_i^{-1}) \begin{cases} x_{ij} = \rho_j (x'_i) \\ x_{sj} = x'_{sj} (x'_i [\theta])^{(n-1)/2} \end{cases} \quad ; \quad (V_i^{-1}) \begin{cases} x_{ij} = \varepsilon_j (x'_i) \\ x_{sj} = x'_{sj} (x'_i [\theta])^{(n-3)/2} \end{cases}$$

$$(s = 1 , 2 , \cdots , r \; ; \; s \neq i) ,$$

essendo le $\rho_j (x'_i)$ ed $\varepsilon_j (x'_i)$ le componenti rispettivamente di $\xi_i'^{(n+1)/2}$ e di $\xi_i'^{(n-1)/2}$ (1).

Concludiamo che: *le quadriche* $\mu_j (x_i) = 0$ *sono le trasformate, mediante* U_i, *degli iperpiani* $\psi_j (\sigma (x_i^*) \mid x_i) = 0$ *polari, rispetto alle quadriche* $\varphi_j (x_i) = 0$, *dei punti corrispondenti a* P^* *in* V_i.

6. Un S_{n-1} di Σ incontra T_{r-1} in un punto P_1, T_{s-r-1} in un S_{n-2} (che è ω) e sega nella stessa quadrica le quadriche $\mu_j (x_1) = 0$, $\mu_j (x_2) = 0 , \cdots , \mu_j (x_r) = 0$ per ogni $j = 1 , 2 , \cdots , n$. Viceversa mostreremo che:

Un S_{n-1}, *passante per un assegnato punto* P^* *di* S'_{s-1}, *che incontri* T_{r-1} *in un punto e* T_{s-r-1} *in un* S_{n-2} *e seghi nella stessa quadrica le quadriche* $\mu (x_1) = 0$, $\mu_j (x_2) = 0 , \cdots , \mu_j (x_r) = 0$, *per ogni* $j = 1 , 2 , \cdots , n$, *è un* S_{n-1} *di* Σ.

(1) Nel caso $n = p = 3$, le U_i sono trasformazioni quadratiche involutorie e le V_i si riducono all'identità.

Assegnato infatti un punto $P^*(\xi_1^*, \xi_2^*, \cdots, \xi_r^*)$ di S'_{s-1}, si scelgano $n-1$ punti in T_{s-r-1}, dei quali uno $B(l_1 \zeta_1, l_2 \zeta_1, \cdots, l_r \zeta_1)$ in T_{r-1} e gli altri $n-2$ $A_h(a_1^h, a_2^h, \cdots, a_r^h)$ $(h = 1, 2, \cdots, n-2)$ fuori di T_{r-1}, in modo da individuare con P^* un S_{n-1}, che ha così le equazioni:

$$\xi_i = m_h a_i^h + m_{n-1} \xi_i^* + m_n l_i \zeta_1 \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

essendo $m_j \in \delta$ dei parametri (nel primo addendo del secondo membro è sottintesa la somma per $h = 1, 2, \cdots, n-2$). Se, per ogni $j = 1, 2, \cdots, n$, tale S_{n-1} sega nella stessa quadrica le quadriche $\mu_j(x_i) = 0$, rappresentate dalla (11), le r equazioni

$$(m_h a_i^h + m_{n-1} \xi_i^* + m_n l_i \zeta_1)^2 \xi_i^{*\,n-2} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

dovranno identificarsi. Ciò è possibile se, e soltanto se, $l_i = \lambda_i$, e $a_i^h = \xi_i^* a^h$, essendo a^h $n-2$ quantità dell'algebra $\mathfrak{A}$; cioè se $B \equiv P_1$ e se tutti gli A_h appartengono all'S_{n-1} di Σ che passa per P^*.

Il risultato sopra enunciato, assieme a quanto esposto nell'ultimo capoverso del n. 5, dà una caratterizzazione proiettiva del sistema grafico elementare Σ.

BIBLIOGRAFIA.

[1] B. SEGRE, *Teoria di Galois, fibrazioni proiettive e geometrie non desarguesiane*, « Ann. di Mat. » (4), *64*, 11–29 (1964).

[2] A. A. ALBERT, *Structure of algebras*, American Math. Society, 1939, 23–24.

SUMMARY. — Geometric study of the structure of an algebra related to a purely inseparable extension, with applications to a fibration problem, extending some of the results contained in B. Segre [1].