Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Adolf Haimovici

Sur un espace à connexion affine associé à un système de Pfaff

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.6, p. 828–837.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_6_828_0>

Geometria. — *Sur un espace à connexion affine associé à un système de Pfaff*. Nota di ADOLF HAIMOVICI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

On a étudié diverses interprétations géometriques des systèmes de Pfaff

$$dy^i = a^i_j(x, y)\, dx^j \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n), \tag{1}$$

sous certaines hypothèses restrictives sur les fonctions $a^i_j(x, y)$. On trouve des considérations concernant les espaces à connexion affine liés à un système de Pfaff dans le livre de J. A. Shouten, *Ricci Calculus* [7], où il y a aussi une riche bibliographie concernant cette question. Une espace différent à $2n$ dimensions à été associé par M. Haimovici [4, 5] à un système (1).

Récemment [3] nous nous sommes occupés de la même question dans le cas des systèmes (1) complètement intégrables, en utilisant la projectivité

$$Y^i = a^i_j(x; y)\, X^j,$$

entre les ensembles de droites qui passent par les points x et y respectivement, de deux espaces projectifs.

La généralisation de ces idées fait l'objet du présent article: on associe à (1) un espace à connexion affine qui admet n champs de vecteurs covariants et n champs de vecteurs contravariants parallèles. Les éspaces à connexion affine associés à un système complètement intégrable ont la torsion et la courbure nulle; la réciproque est aussi vraie.

On démontre encore un théorème d'existence d'un système (1) quand on connait certains systèmes de vectuers qui sont en relation avec la courbure et la torsion de l'espace.

Enfin on démontre un théorème d'existence pour les lignes autoparallèles de l'espace, analogue au théorème classique.

1. POSITION DU PROBLÈME. CONNEXION AFFINE ASSOCIÉE À UN SYSTÈME DE PFAFF. – Considérons le système de Pfaff

$$dy^\alpha = a^\alpha_j(x; y)\, dx^j, \tag{1}$$

$$x \equiv (x^1, x^2, \cdots, x^n) \quad , \quad y \equiv (y^1, y^2, \cdots, y^n), \qquad (\alpha, j = 1, 2, \cdots, n),$$

sous les hypothèses suivantes:

a) les fonctions $a^\alpha_j(x, y)$ sont de classe C^2, sur $R^n \times R^n$;

b) la matrice $\| a^\alpha_j(x, y) \|$ est non singulière;

$$\det \| a^\alpha_j \| \neq 0, \qquad x, y \in R^n; \tag{2}$$

c) les fonctions $a^\alpha_j(x, y)$ sont bornées

$$| a^\alpha_j | < M.$$

(*) Nella seduta del 17 giugno 1965.

Associons à ce système de Pfaff, le système algébrique

$$Y^\alpha = a_j^\alpha(x\,;y)\ X^j. \tag{3}$$

En interprétant les x^i comme les coordonnées d'un point d'un espace R_1^n à n dimensions, les y^i comme les coordonnées d'un point dans un second espace R_2^n, les X^i et Y^i comme les composantes de deux directions des deux espaces R_1^n et R_2^n respectivement, le système (3) représente une projectivité entre les directions X et Y, issues des points x et y respectivement; il est bien entendu que cette projectivité dépend des points x et y.

Considérons maintenant une paire de points $x_0 \in R_1^n$ et $y_0 \in R_n^2$, une courbe Γ_x à tangente continue, qui passe par x_0:

$$\begin{cases} x^i = x^i(t) \\ x^i(t) \in C^1[0\,,T], \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \leq t \leq T \\ x^i(0) = x_0^j \end{matrix} \tag{4}$$

et la courbe Γ_y:

$$y^\alpha = y^\alpha(t) \tag{4'}$$

intégrale du système:

$$\frac{dy^\alpha}{dt} = a_j^\alpha(x\,;y)\frac{dx^j}{dt}, \qquad y^\alpha(0) = y_0^\alpha. \tag{5}$$

Il résulte des théorèmes classiques sur les systèmes d'équations différentielles que les fonctions $y^\alpha(t)$ sont définies pour $t \in [0\,,T]$ et qu'elles sont de classe C^1.

Faisons correspondre à chaque point $x(t)$ de Γ_x le point $y(t)$ de Γ_y; soient $x_1 \in \Gamma_x$ et $y_1 \in \Gamma_y$ une paire de points correspondants, et

$$Y^\alpha = a_i^\alpha(x_1\,;y_1)\,X^i$$

la projectivité du type (3), associée aux points x_1 et y_1. Si on considère aux points y_0 et y_1 une même direction Y^i, alors les directions X^i et X_1^i, qui lui correspondent aux points x_0 et x_1 respectivement satisfont à

$$a_i^\alpha(x_0\,;y_0)\,X^i = a_i^\alpha(x_1\,;y_1)\,X_1^i.$$

Il est évident que les X_1^i, dépendent de x_0, y_0, X^i et de t. De ces dernières équations on déduit que la famille de directions X^i correspondant à une meme direction Y^i définie le long de Γ_x, satisfait à

$$a_i^\alpha(x\,;y)\frac{dX^i}{dt} + \left(\frac{\partial a_i^\alpha}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} + \frac{\partial a_i^\alpha}{\partial y^\alpha}\frac{dy^\alpha}{dt}\right)X^i = 0,$$

où nous avons omis l'indice zéro de x_0 et y_0. En tenant compte du fait que $y'(t)$ satisfait à (5) et en désignant par $A_\alpha^i(x\,;y)$ les réciproques de a_i^α, qui satisfont à

$$A_\alpha^j\,a_k^\alpha = \delta_k^j\,, \tag{6}$$

on constate que la dernière équation s'écrit encore sous la forme:

$$\delta X^i + A^i_\alpha \frac{Da^\alpha_j}{Dx^k} X^j dx^k = 0, \tag{7}$$

où nous avons désigné par D/Dx^k l'opérateur:

$$\frac{D}{Dx^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} + a^\alpha_k \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \cdot \tag{8}$$

La relation (7) suggère la notation

$$\Gamma^i_{jk} = A^i_\alpha \frac{Da^\alpha_j}{Dx^k}, \tag{9}$$

de même que l'intérprétation de ces fonctions comme coefficients d'une connexion affine; la différence entre cette connexion et la connexion affine ordinaire consiste dans le fait que les coefficients dépendent des variables y qui sont les intégrales de (5).

2. TRANSFORMATIONS DES COEFFICIENTS Γ^h_{ij}. – Soumettons les variables x^i à la transformation

$$\xi^i = \xi^i(x^j),$$

de classe C^2 sur R^n, et telle que

$$\det\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right) \neq 0.$$

Le système (1) devient

$$d\eta^\alpha = a^\alpha_j(x(\xi);\eta) \frac{\partial x^j}{\partial \xi^r} d\xi^r,$$

c'est-à-dire, les coefficients a^α_j sont les composantes de n vecteurs covariants, dont la loi de transformation est

$$\bar{a}^\alpha_k = a^\alpha_j \frac{\partial x^j}{\partial \xi^k} \cdot \tag{10}$$

De la même manière, on constate que les A^i_α sont les composantes de n vecteurs contravariants, dont la loi de transformation est

$$\bar{A}^i_\beta = A^j_\beta \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}, \tag{10'}$$

et que les dérivées $\partial a^\alpha_j/\partial y^\lambda$ sont les composantes de n^2 vecteurs convariants, l'indice de covariance étant j. Si on applique l'opérateur

$$\frac{D}{D\xi^k} = \frac{\partial}{\partial \xi^k} + \bar{a}^\alpha_k \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial x^h}{\partial \xi^k} \frac{D}{Dx^h}$$

aux deux membres de (10), on obtient:

$$\frac{Da^{\alpha}_{s}}{D\xi^{k}} = \frac{Da^{\alpha}_{j}}{Dx^{h}} \frac{\partial x^{h}}{\partial \xi^{k}} \frac{\partial x^{j}}{\partial \xi^{s}} + a^{\alpha}_{j} \frac{\partial^{2} x^{j}}{\partial \xi^{s} \partial \xi^{k}}$$

et par suite:

$$\frac{\partial^{2} x^{p}}{\partial \xi^{s} \partial \xi^{r}} = \overline{\Gamma}^{\alpha}_{sr} \frac{\partial x^{s}}{\partial \xi^{\alpha}} - \Gamma^{p}_{ab} \frac{\partial x^{a}}{\partial \xi^{s}} \frac{\partial x^{b}}{\partial \xi^{r}}; \tag{11}$$

c'est la loi de transformation ordinaire pour les coefficients d'une connexion. D'ailleurs, c'est cette loi qui justifie le fait que les Γ^{k}_{ij} peuvent définir une connexion affine.

3. LA TORSION ET LA COURBURE DE LA CONNEXION. – On trouve aisément pour la torsion:

$$T^{k}_{ij} = \Gamma^{k}_{ij} - \Gamma^{k}_{ji} = A^{\lambda}_{\alpha} \left(\frac{Da^{\alpha}_{i}}{Dx^{j}} - \frac{Da^{\alpha}_{j}}{Dx^{i}} \right); \tag{12}$$

c'est un tenseur deux fois covariant et une fois contravariant.

Quant au tenseur de courbure, nous allons définir comme tel le tenseur:

$$R^{i}_{jhk} = \frac{D\Gamma^{j}_{ih}}{Dx^{k}} - \frac{D\Gamma^{i}_{jk}}{Dx^{h}} + \Gamma^{a}_{jh} \Gamma^{i}_{ak} - \Gamma^{a}_{jk} \Gamma^{i}_{ah}. \tag{13}$$

On définira encore comme dérivée covariante d'un tenseur l'expression habituelle, à la seule différence que la dérivée $\partial/\partial x^{k}$ est remplacée par D/Dx^{k}.

En tenant compte de cette définition, on constate que la dérivée covariante de a^{i}_{j} et celle de A^{i}_{j} sont nulles, parce que

$$\left\{ \begin{aligned} a^{\alpha}_{j,r} &= \frac{Da^{\alpha}_{j}}{Dx^{r}} - \Gamma^{a}_{jr} a^{\alpha}_{a} = \frac{Da^{\alpha}_{j}}{Dx^{r}} - A^{a}_{\beta} \frac{Da^{\beta}_{j}}{Dx^{r}} a^{\alpha}_{a} = 0 \\ A^{j}_{\beta,r} &= \frac{DA^{i}_{\beta}}{Dx^{r}} + \Gamma^{i}_{rs} A^{s}_{\beta} = -A^{\alpha}_{\beta} A^{i}_{\gamma} \frac{Da^{\gamma}_{a}}{Dx^{r}} + A^{i}_{\gamma} \frac{Da^{\gamma}_{a}}{Dx^{r}} A^{a}_{\beta} = 0. \end{aligned} \right. \tag{14}$$

On vérifie encore aisément l'identité:

$$\frac{D^{2}}{Dx^{h} Dx^{k}} - \frac{D^{2}}{Dx^{k} Dx^{h}} = \left(\frac{Dx^{\lambda}_{k}}{Dx^{h}} - \frac{Da^{\lambda}_{h}}{Dx^{k}} \right) \frac{\partial}{\partial y^{\lambda}}. \tag{15}$$

En utilisant ces relations on trouve

$$R^{i}_{jhk} = A^{i}_{\alpha} a^{\lambda}_{b} \frac{\partial a^{\alpha}_{j}}{\partial y^{\lambda}} T^{b}_{hk}. \tag{16}$$

Si nous posons

$$S^{i}_{jk} = a^{\lambda}_{k} A^{i}_{\beta} \frac{\partial a^{\beta}_{j}}{\partial y^{\lambda}}, \tag{17}$$

le tenseur de courbure s'écrit sous la forme

$$R^{i}_{jhk} = S^{i}_{jb} T^{b}_{hk}. \tag{18}$$

4. IDENTITÉS DE BIANCHI; FORMULES DE DÉRIVATION. – Les identités de Bianchi deviennent dans notre cas:

$$(19)\qquad S^i_{ja}(T^a_{kl,r} + T^a_{rk,l} + T^a_{lr,k}) + S^i_{ja,r}\,T^a_{kl} + S^i_{ja,l}\,T^a_{rk} + S^i_{ja,k}\,T^a_{lr} =$$

$$= a^\lambda_a\left(\frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial y^\lambda}T^a_{kr} + \frac{\partial\Gamma^i_{jr}}{\partial y^\lambda}T^a_{lk} + \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial y^\lambda}\,T^a_{pl}\right) + S^i_{ja}\,(T^a_{ks}\,T^s_{lr} + T^a_{ls}\,T^s_{rk} + T^a_{rs}\,T^s_{kl}),$$

et

$$(20)\qquad S^i_{ja}\,T^a_{kl} + S^i_{ka}\,T^a_{lj} + S^i_{la}\,T^a_{jk} = T^i_{jk,l} + T^i_{kl,j} + T^i_{lj,k} +$$

$$+ T^i_{sj}\,T^s_{kl} + T^i_{sk}\,T^s_{lj} + T^i_{sl}\,T^s_{jk}.$$

Or, par des calculs élémentaires on costate que

$$(21)\qquad S^i_{ja,r} - \frac{\partial\Gamma^i_{jr}}{\partial y^\lambda}\,a^\lambda_a + S^i_{jk}\,S^k_{ra} = 0;$$

Il résulte alors que les identités (19) se réduisent aux identités (20).

D'ailleurs (17) donne:

$$(17')\qquad \frac{\partial a^\beta_j}{\partial y^\lambda} = A^k_\lambda\, a^\beta_i\, S^i_{jk},$$

et en utilisant les égalités $\partial^2 a^\beta_j/\partial y^\lambda\,\partial y^\mu = \partial^2 a^\beta_j/\partial y^\mu\,\partial y^\lambda$, $\partial^2 a^\beta_j/\partial y^\lambda\,\partial x^i = \partial^2 a^\beta_j/\partial x^i\,\partial y^\lambda$ et (12), on obtient les relations:

$$(22)\qquad A^a_\lambda\,\frac{\partial S^j_{ra}}{\partial y^\sigma} - A^a_\sigma\,\frac{\partial S^j_{ra}}{\partial y^\lambda} + A^a_\lambda\,A^b_\sigma\,(S^j_{mb}\,S^m_{ra} - S^j_{ma}\,S^m_{rb}) + A^k_\tau\,S^j_{ra}(A^p_\sigma\,S^\tau_{\lambda p} - A^p_\lambda\,S^\tau_{\sigma p}),$$

et

$$(23)\qquad S^i_{jh,r} - S^i_{rh,j} - a^\lambda_h\,\frac{\partial T^i_{jr}}{\partial y^\lambda} + S^i_{ja}\,S^a_{rh} - S^i_{ra}\,S^a_{jh} = 0.$$

Remarquons encore que les dérivées partielles $\partial a^\alpha_i/\partial y^\lambda$ sont les composantes de n vecteurs covariants; on peut donc poser

$$(24)\qquad \frac{\partial a^\alpha_j}{\partial y^\lambda} = C^\alpha_{\beta\lambda}\,a^\beta_j,$$

$C^\alpha_{\beta\lambda}$ étant des fonctions de x et y, qui peuvent être exprimées à l'aide des a^i_j et de $\partial a^\alpha_j/\partial y^\gamma$:

$$(25)\qquad C^\alpha_{\beta\lambda} = A^a_\beta\,\frac{\partial a^\alpha_a}{\partial y^\lambda} = -\,a^\alpha_a\,\frac{\partial A^a_\beta}{\partial y^\lambda}.$$

On obtient encora de (24)

$$(25')\qquad \frac{\partial A^i_\beta}{\partial y^\lambda} = -\,C^\alpha_{\beta\lambda}\,A^i_\alpha.$$

L'égalité des dérivées $\partial^2 a_j^\alpha / \partial y^\lambda \partial y^\sigma = \partial^2 a_j^\alpha / \partial y^\sigma \partial y^\lambda$ conduit à

$$\frac{\partial C_{\beta\lambda}^\alpha}{\partial y^\sigma} - \frac{\partial C_{\beta\sigma}^\alpha}{\partial y^\lambda} + C_{\mu\lambda}^\alpha C_{\beta\sigma}^\mu - C_{\mu\sigma}^\alpha C_{\beta\lambda}^\mu = 0 ; \tag{26}$$

il résulte que les $C_{\alpha\lambda}^\beta$ se comportent – comme fonctions des variables y – comme les coefficients d'une connexion de courbure nulle.

En tenant compte de (17) et (24) on obtient la relation entre S_{ij}^k et les coefficients $C_{\alpha\beta}^\gamma$:

$$S_{jk}^i = a_k^\lambda \, a_j^\alpha \, A_\beta^i \, C_{\alpha\lambda}^\beta , \tag{27}$$

et

$$C_{\alpha\lambda}^\beta = A_\lambda^k A_\alpha^j \, a_i^\beta \, S_{jk}^i ; \tag{27'}$$

en utilisant (21), (27) et (27'), on trouve:

$$C_{\alpha\lambda,r}^\beta = A_\alpha^j \, a_i^\beta \frac{\partial \Gamma_{jr}^i}{\partial y^\lambda} - a_r^\mu \, C_{\alpha\nu}^\beta C_{\mu\lambda}^\nu , \tag{28}$$

et, d'une manière analogue à celle utilisée pour S_{ij}^k:

$$a_j^\alpha C_{\alpha\lambda,r}^\beta - a_r^\alpha C_{\alpha\lambda,j}^\beta = a_i^\beta \frac{\partial T_{jr}^i}{\partial y^\lambda} - a_j^\alpha \, a_r^\mu \, (C_{\alpha\nu}^\beta C_{\mu\lambda}^\nu - C_{\mu\nu}^\beta C_{\alpha\lambda}^\nu) . \tag{28'}$$

Il est bien entendu que la relation de Bianchi (20) peut être exprimée à l'aide des $C_{\alpha\beta}^\gamma$, au bien des S_{ij}^k.

Enfin, compte tenu du fait que pour α et λ fixées, $\partial a_j^\alpha / \partial y^\lambda$ est un vecteur, posons:

$$\frac{\partial a_i^\alpha}{\partial y^\lambda} = b_{\lambda i}^\alpha , \tag{27}$$

où

$$b_{\lambda i}^\alpha = C_{\lambda\beta}^\alpha \, a_i^\beta ; \tag{27'}$$

et en même temps:

$$\frac{D a_h^\alpha}{D x^k} - \frac{D x_k^\alpha}{D x^h} = \theta_{hk}^\alpha , \tag{28}$$

où

$$\theta_{hk}^\alpha = a_i^\alpha \, T_{hk}^i . \tag{28'}$$

De ces dernières relations on déduit par des opérations élémentaires:

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\partial b_{\varrho h}^\alpha}{\partial y^\sigma} - \frac{\partial b_{\sigma h}^\alpha}{\partial y^\varrho} = 0 , \\ & \frac{\partial \theta_{hk}^\lambda}{\partial y^\varrho} - \frac{D_{\varrho h}^\lambda}{D x^k} + \frac{D b_{\varrho k}^\lambda}{D x^h} = b_{\varrho k}^\sigma \, b_{\sigma h}^\lambda - b_{\varrho h}^\sigma \, b_{\sigma k}^\lambda , \\ & \frac{D\theta_{hk}^\lambda}{D x^l} + \frac{D\theta_{kl}^\lambda}{D x^h} + \frac{D\theta_{lh}^\lambda}{D x^k} = b_{\sigma h}^\lambda \, \theta_{kl}^\sigma + b_{\sigma k}^\lambda \, \theta_{lh}^\sigma + b_{\sigma l}^\lambda \, \theta_{hk}^\sigma . \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Les deux dernières identités s'écrivent encore à l'aide des dérivées covariantes:

$$b^{\alpha}_{\varrho k,h} - b^{\alpha}_{\varrho h,k} = \mathrm{T}^{a}_{kh}\, b^{\lambda}_{\varrho a} + b^{\sigma}_{\varrho k}\, b^{\lambda}_{\sigma h} - b^{\sigma}_{\varrho h}\, b^{\lambda}_{\sigma k} - \frac{\partial \theta^{\lambda}_{hk}}{\partial y^{\varrho}},$$

$$\theta^{\lambda}_{hk,l} + \theta^{\lambda}_{lh,k} + \theta^{\lambda}_{kl,h} = b^{\lambda}_{\sigma h}\,\theta^{\sigma}_{kl} + b^{\lambda}_{\sigma k}\,\theta^{\sigma}_{lh} + b^{\lambda}_{\sigma l}\,\theta^{\sigma}_{hk} + \mathrm{T}^{a}_{hl}\,\theta^{\sigma}_{ak} + \mathrm{T}^{a}_{kh}\,\theta^{\sigma}_{al} + \mathrm{T}^{a}_{lk}\,\theta^{\sigma}_{ah}\,.$$

5. UN THÉORÈME D'EXISTENCE. - Supposons donnés les n^2 vecteurs covariants $b^{\alpha}_{\varrho i}$ et les n tenseurs deux fois covariants θ^{α}_{hk}. Nous allons démontrer que ces données, de même que certaines données initiales pour les a^{α}_{i} déterminent le système de Pfaff (1). Plus précisément nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. - *Si:*

1° $b^{\alpha}_{\varrho i}$ *sont* n^3 *fonctions de* $x^1, x^2, \cdots, x^n\,; y^1, y^2, \cdots, y^n$ *de classe* C^{n-i+1} *définies sur*

$$\mathrm{R}^{2n}: \qquad -\infty < x^i\,, y^j < +\infty\,,$$

bornées par M, *c'est à dire*

$$|\, b^{\alpha}_{\varrho i}\,| \leq \mathrm{M}\,; \tag{30}$$

2° θ^{α}_{ij} *sont* n^3 *fonction des variables* x^i, y^j *de classe* $\mathrm{C}^{n+1-\mu}$ $(\mu = \max(i,j))$ *définies sur le même espace* R^{2n}. *et bornées:*

$$|\,\theta^{\alpha}_{ij}| \leq \mathrm{M}\,; \tag{30'}$$

3° *les fonctions* θ^{α}_{ij} *et* $b^{\alpha}_{\varrho i}$ *satisfont à* (29);

4° *les fonctions* $\varphi^{\alpha}_{1}(x^1, x^2, x^3, \cdots, x^n)$, $\varphi^{\alpha}_{2}(x^2, x^3, \cdots, x^n), \cdots$ $\cdots, \varphi^{\alpha}_{p}(x^p, x^{p+1}, \cdots, x^n), \cdots, \varphi^{\alpha}_{n}(x^n)$ *sont de classe* $\mathrm{C}^n, \mathrm{C}^{n-1}, \cdots, \mathrm{C}^{n+1-p}$ *respectivement définies pour* $-\infty < x^i < +\infty$, *alors il existe un système unique de fonctions* $a^{\alpha}_{p}(x\,; y)$ *de classe* C^{n+1-p} *satisfaisant à* (27), (28) *et aux conditions initiales:*

$$a^{\alpha}_{p}(x^1_0, x^2_0, \cdots, x^{p-1}_0, x^p, \cdots, x^n\,; y^1_0, y^2_0, \cdots, y^n_0) = \varphi^{\alpha}_{p}(x^p, x^{p+1}, \cdots, x^n)\,. \tag{31}$$

Pour la démonstration, nous allons utiliser une méthode d'induction: Considérons le système

$$\frac{\partial a^{\alpha}_{1}}{\partial y^{\lambda}} = b^{\alpha}_{\lambda 1}\,, \qquad (\alpha\,, \lambda = 1\,, 2\,, \cdots, n)\,. \tag{27$_1$}$$

Il est évident que, compte tenu de la première relation (29), pour $h = 1$, ce système admet une intégrale unique, qui pour $y^{\lambda} = y^{\lambda}_0$ $(\lambda = 1\,, 2\,, \cdots, n)$ se réduit à $\varphi^{\alpha}_{1}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$. Cette intégrale est

$$a^{\alpha}_{1} = \varphi^{\alpha}_{1}(x^1, x^2, \cdots, x^n) + \int_{y^1_0}^{y^1} b^{\alpha}_{11}(x^1, x^2, \cdots, x^n\,; y^1, y^2_0, \cdots, y^n_0)\, dy^1 +$$

$$+\int_{y_0^2}^{y^2} b_{12}^{\alpha}(x^1, x^2, \cdots, x^n, y^1, y^2, y_0^3, \cdots, y_0^n)\, dy^2 + \cdots$$

$$+\int_{y_0^n}^{y^n} b_{1n}^{\alpha}(x^1, x^2, \cdots, x^n; y^1, \cdots, y^n)\, dy^n.$$

Elle est définie pour $-\infty < x^i, y^i < +\infty$ et est de la même classe que les fonctions φ_1^{α} et $b_{1\lambda}^{\alpha}$, c'est à dire C^n.

Supposons maintenant trouvées les fonctions $a_i^{\alpha}(x, y)$ pour $i = 1, 2, \cdots, p$, p–fixée, définies pour $-\infty < x^i, y^j < +\infty$, de classe C^{n-i+1} qui satisfont à (27), (28) pour $i, h, k = 1, 2, \cdots, p$, et qui, pour $y^{\lambda} = y_0^{\lambda} (\lambda = 1, 2, \cdots, n)$ et $x^i = x_0^i$ pour $i = 1, 2, \cdots, p-1$ se réduisent à

$$(32)\quad a_i^{\alpha}(x^1, x^2, \cdots, x_0^{i-1}, x^i, x^{i+1}, \cdots, x^n; y_0^1, y_0^2, \cdots, y_0^n) = \varphi_i^{\alpha}(x^i, x^{i+1}, \cdots, x^n).$$

Considérons alors le système:

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a_{p+1}^{\alpha}}{\partial y^{\lambda}} = b_{\lambda, p+1}^{\alpha}, \\[2ex] \dfrac{\partial a_{p+1}^{\alpha}}{\partial x^k} = \dfrac{\partial a_k^{\alpha}}{\partial x^{p+1}} - a_k^{\sigma} b_{\sigma, p+1}^{\alpha} + a_{p+1}^{\sigma} b_{\sigma, k}^{\alpha} + \theta_{p+1, k}^{\alpha}, \\[2ex] \qquad (k = 1, 2, \cdots, p;\ \alpha, \lambda = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

et le système associé:

$$a_{p+1}^{\alpha} = \varphi_{p+1}^{\alpha}(x^{p+1}, x^{p+2}, \cdots, x^n) +$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{n} \int_{y_0^{\lambda}}^{y^{\lambda}} \{ b_{\lambda, p+1}^{\alpha}(x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^n; y^1, y^2, \cdots, y^{\lambda}, y_0^{\lambda+1}, \cdots, y_0^n) \}\, dy^{\lambda} +$$

$$+\sum_{k=1}^{p} \int_{x_0^k}^{x^k} \left\{ \frac{\partial a_k^{\alpha}}{\partial x^{p+1}} - a_k^{\sigma} b_{\sigma, p+1}^{\alpha} + a_{p+1}^{\sigma} b_{\sigma, k}^{\alpha} + \theta_{p+1, k}^{\alpha} \right\}_{x^{k+1} = x_0^{k+1}, x^{k+2} = x_0^{k+2}, \cdots, x^n = x_0^n} dx^k.$$

Or, compte tenu de (29), ce dernier système admet une intégrale unique qui est aussi l'intégrale de (33), qui satisfait à (32) (voir à ce sujet [1 — 2], [6]). Cette intégrale est – elle aussi – définie pour $-\infty < x^i, y^i < +\infty$, et de classe C^{n-p}, parce que les fonctions qui interviennent dans le second membre sont de cette classe; et cela achève notre démonstration.

Quelques remarques. – 1° Des mêmes travaux cités plus haut, [1], [2], [6] il résulte qu'au lieu de donner les fonctions φ_i^{α}, θ_{ij}^{α}, $b_{\lambda i}^{\alpha}$ sur l'espace $R^n \times R^n$, on peut les donner sur un domaine $G_1 \times G_2$, $G_1, G_2 \subset R^n$. L'intégrale existera sur ce domaine.

2° Si l'on considère la matrice

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2, \cdots, a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2, \cdots, a_2^n \\ \vdots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2, \cdots, a_n^n \end{pmatrix}; \tag{34}$$

alors notre théorème afirme qu'on peut donner arbitrairement:

a) les éléments de la première ligne pour $y^i = y_0^i \, (i = 1, 2, \cdots, n)$;

b) les éléments de la seconde ligne pour $y^i = y_0^i \, (i = 1, 2, \cdots, n), x^1 = x_0^1$;

. . . .

e) les éléments de la n–ème ligne pour $y^i = y_0^i \, (i = 1, 2, \cdots, n), x^1 = x_0^1, x^2 = x_0^2, \cdots, x^{n-1} = x_0^{n-1}$.

3° Si $\partial a_i^j / \partial y^\lambda = 0$, c'est à dire si les a_i^j ne dépendent pas des y^α alors la courbure est nulle.

4° Si le tenseur T_{ij}^h est nul, alors le tenseur de courbure est lui aussi nul, et le système (1) est complètement intégrable.

6. LES LIGNES AUTOPARALLÈLES. – Les équations de ces lignes seront

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i (x, y) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \tag{35}$$

où y est donné par

$$\frac{dy^i}{dt} = a_j^i (x, y) \frac{dx^j}{dt}, \tag{36}$$

t étant un paramètre quelconque.

Les équations (35) et (36) constituent un sytème qui, si $a_j^i \in C^2$, admet une intégrale unique satisfaisant aux valeurs initiales

$$x^i (0) = x_0^i \quad , \quad \frac{dx^i}{dt} (0) = x_{i0}^{i} \quad , \quad y^i (0) = y_0^i . \tag{37}$$

Il résulte donc qu'il y à une seule courbe autoparallèle qui passe par un point donné de l'espace des coordonnées y et tangente à une droite donné.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. HAIMOVICI, *Sur la notion d'intégrabilité complète et sur un système complètement intégrable*, « Analele St.ale Univ. "Al. I. Cuza" din Iași », S. I., T. VI, p. 29 (1960).

[2] A. HAIMOVICI, *Une étude globale de certains systèmes d'équations différentielles qui généralisent les systèmes de Pfaff*, « Analele St.ale Univ. "Al. I. Cuza" din Iași », S. I., T. X, p. 43 (1964).

[3] A. HAIMOVICI, *Sur une interprétation géométrique des systèmes de Pfaff complètement intégrables et sur leur arbitrariété*, « Analele St.ale Univ. "Al. I. Cuza" din Iași », S. I., T. XI (1965) sous presse.

[4] M. HAIMOVICI, *Sur la géométrie des familles de transformations ponctuelles simplement transitives*, « Ann. Scientifiques de l'Univ. de Jassy », T. XXX p. 1 (1944–47).

[5] M. HAIMOVICI, *Sur les espaces des familles de transformations de variables simplement transitives sans courbure de III^e espèce*, « Ann. Scientifiques de l'Univ. de Jassy », T. XXXI, p. 72 (1948).

[6] D. PETROVANU, *Asupra existenței în mare a soluțiilor sistemelor de ecuații Pfaff complet integrabile și a comportării lor asimptotice*, « Acad. R.P.R. Filiala Iași, Studii și Cercetări Stiințifice–Matematica–Anul », X, p. 125 (1959).

[7] S. A. SCHOUTEN, *Ricci Calculus*, II^nd Ed., Springer–Verlag, Berlin Göttingen–Heidelberg 1954.

SUNTO. — Ad un sistema pfaffiano (1) viene qui associato uno spazio a connessione affine, in guisa che la completa integrabilità del sistema viene ad equivalere all'annullarsi della curvatura e della torsione dello spazio. Il sistema resta poi definito dalla conoscenza di certi sistemi di vettori legati alla curvatura ed alla torsione dello spazio.