ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIOVANNI AQUARO

Intorno ad una generalizzazione degli spazi paracompatti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.6, p. 824–827.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_6_824_0>

Matematica. — *Intorno ad una generalizzazione degli spazi paracompatti*. Nota di GIOVANNI AQUARO, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Generalizzando la nozione di spazio paracompatto, lo scrivente ha introdotto in [1], cui si rimanda per la terminologia ed il simbolismo qui usati, la nozione di spazio topologico $\boldsymbol{a}$–paracompatto, con $\boldsymbol{a}$ numero cardinale (1) infinito, e ne ha studiato le proprietà con una certa ampiezza.

Successivamente, K. Morita in [3] ha ridefinito, negli stessi termini, la nozione di $\boldsymbol{a}$–paracompattezza ritrovando alcuni dei risultati di [1] e stabilendone altri di rilevantissimo interesse.

In questa Nota si arrecano alcuni nuovi contributi alla teoria degli spazi topologici $\boldsymbol{a}$–paracompatti.

Per comodità di esposizione converrà adoperare due definizioni.

DEF. 1. – *Se* $(A_\iota)_{\iota \in I}$ *è una famiglia di parti di un insieme* E, *si dice che* $(A_\iota)_{\iota \in I}$ *ha cardinalità puntuale inferiore ad* $\boldsymbol{a}$ *se per ogni* $x \in E$, *detto* I_x^* *l'insieme degli* $\iota \in I$ *tali che* $x \in A_\iota$, *risulta* card $(I_x) \leq \boldsymbol{a}$.

DEF. 2. – *Se* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ *è un ricovrimento dell'insieme* E, *chiamasi* $\boldsymbol{a}$*–quasi raffinamento di* $(U_\iota)_{\iota \in I}$, *ogni ricovrimento* $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ *di* E *tale che, per ogni* $\lambda \in L$ *da* $X \subset V_\lambda$ *e* card $(X) \leq \boldsymbol{a}$, *per una tale parte* X *di* E, *consegua che esiste* $\iota \in I$ *tale che sia* $X \subset U$.

Evidentemente, se è $\boldsymbol{a} =$ card (E) allora ogni $\boldsymbol{a}$–quasi raffinamento di $(U_\iota)_{\iota \in I}$ è un effettivo raffinamento di $(U_\iota)_{\iota \in I}$.

Si dovrà utilizzare il seguente lemma.

LEMMA 1. – *Se* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ *è un ricovrimento dell'insieme* E, *avente cardinalità puntuale inferiore ad* $\boldsymbol{a}$ (def. 1), *ogni* $\boldsymbol{a}$–quasi *raffinamento* $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ *di* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ (def. 2) *è un raffinamento dello stesso* $(U_\iota)_{\iota \in I}$.

Dim. – Sia $\lambda \in L$ ed $x \in V_\lambda$. Detto I_x^* l'insieme degli $\iota \in I$ tali che $x \in U_\iota$, ragionando per assurdo, supponiamo che per ogni $\iota \in I_x^*$ sia $V_\lambda \cap \complement U_\iota \neq \emptyset$ e sia $x_\iota \in V_\lambda \cap \complement U_\iota$. Sia X la parte di E formata da x e dagli elementi della famiglia $(x_\iota)_{\iota \in I_x^*}$. Poiché $\boldsymbol{a}$ è infinito, risulta card $(X) \leq$ card $(I_x^*) + 1 \leq \boldsymbol{a} + 1 = \boldsymbol{a}$ mentre che è $X \subset V_\lambda$. Per la def. 2, esiste $\iota \in I$ tale che $X \subset U_\iota$. Risulta, in conseguenza, $x_\iota \in U_\iota$ e quindi $\iota \in I_x^*$ donde $x_\iota \in X \subset U_\iota$ contro la definizione di x_ι. Dunque esiste $\iota \in I$ tale che $V_\lambda \subset U_\iota$.

Ciò premesso, richiamiamo la definizione introdotta in [1] e [3].

DEF. 3. – *Se* E *è uno spazio topologico si dice che* E *è* $\boldsymbol{a}$*–paracompatto, con* $\boldsymbol{a}$ *infinito, se per ogni ricovrimento aperto* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ *di* E *tale che sia* card (I) $\leq \boldsymbol{a}$ *esiste un raffinamento aperto localmente finito di* $(U_\iota)_{\iota \in I}$.

(*) Nella seduta del 17 giugno 1965.

(1) Anche nel seguito con $\boldsymbol{a}$ si denoterà un numero cardinale che, se non si preciserà altrimenti, sarà indifferentemente finito o infinito.

Da questa definizione e dal lemma 1 consegue:

PROP. 1. – *Se* E *è uno spazio topologico ed* $\boldsymbol{a}$ *è infinito le seguenti due proposizioni sono equivalenti:*

a) E *è* $\boldsymbol{a}$*–paracompatto* (def. 3):

b) *se* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ *è un ricovrimento aperto di* E *tale che* card (I) $\leq \boldsymbol{a}$ *esiste un* $\boldsymbol{a}$*-quasi raffinamento aperto e localmente finito di* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ (def. 2).

Dim. – a) $\Rightarrow$ b) è ovvia, mentre b) $\Rightarrow$ a) consegue dal lemma 1.

Si introduce ora una nozione, collegata alla proprietà introdotta da Mansfield in [2], che sarà richiamata appresso nella def. 5.

DEF. 4. – *Se* E *è uno spazio topologico e se* $\boldsymbol{a}$ *è infinito, si dice che* E *è fortemente* $\boldsymbol{a}$*–paracompatto se per ogni ricovrimento aperto di* E *esiste un* $\boldsymbol{a}$*–quasi raffinamento aperto e localmente finito* (def. 2).

PROP. 2. – *Se* E *è uno spazio topologico fortemente* $\boldsymbol{a}$*–paracompatto* (def. 4), *con* $\boldsymbol{a}$ *infinito, allora* E *è* $\boldsymbol{a}$*–paracompatto* (def. 3).

Dim. – Consegue dalla prop. 1.

Conviene ricordare (cfr. [2] def. 2.4).

DEF. 5. – *Se* E *è uno spazio topologico si dice che* E *è* « almost–$\boldsymbol{a}$–fully normal » *se per ogni ricovrimento aperto* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ *di* E *esiste un raffinamento* $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ *di* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ *tale che la stella* (2) *di* $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ *sia un* $\boldsymbol{a}$*–quasi raffinamento di* $(U_\iota)_{\iota \in I}$ (def. 2).

PROP. 3. – *Se* E *è uno spazio topologico e se* $\boldsymbol{a}$ *è infinito allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) E *è* « almost–$\boldsymbol{a}$–fully normal » (def. 5).

b) E *è fortemente* $\boldsymbol{a}$*–paracompatto* (def. 4) *e normale.*

Dim. a) $\Rightarrow$ b). Supponiamo che sia vera la a). Poiché $\boldsymbol{a}$ *è* infinito, si ha $2 < \boldsymbol{a}$ e quindi E è « almost–2–fully normal » e quindi, come è noto ([2] teor. 2.6; oppure [1] p. 326), il filtro degli intorni $\mathfrak{U}$ della diagonale Δ di E è il filtro delle adiacenze della struttura uniforme universale $\mathfrak{U}(E)$ dello spazio E (cfr. [1] § 3, def. 4).

Sia $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un ricovrimento aperto di E. Per la def. 5 esiste un ulteriore ricovrimento aperto $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ di E la cui stella (2) è un $\boldsymbol{a}$–quasi raffinamento di $(U_\iota)_{\iota \in I}$ (def. 2). Posto $V = \bigcup\limits_{\lambda \in L} (V_\lambda \times V_\lambda)$ risulta $V \in \mathfrak{U}$ e quindi, come è noto, (cfr. [1] § 3. def. 4), esiste un ricovrimento aperto localmente finito $(W_k)_{k \in K}$ di E tale che, posto $W = \bigcup\limits_{k \in K} (W_k \times W_k)$, risulti $W \subset V$.

Sia $\mu \in K$ e $x \in W_\mu$ e sia $X \in \mathfrak{P}(W_\mu)$ con card $(X) \leq \boldsymbol{a}$. Risultando $X \subset \mathrm{St}\,(x \mid W_k)_{k \in K} = W(x) \subset V(x) = \mathrm{St}\,(x \mid V_\lambda)_{\lambda \in L}$, per l'ipotesi relativa a $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ e per la def. 5, esiste un $\iota \in I$ tale che $X \subset U_\iota$.

Dunque, per la def. 4, E è fortemente $\boldsymbol{a}$–paracompatto.

Inoltre E è (collettivamente) normale in quanto è « almost–2–fully normal » (cfr. [2] teor. 29). Così è dimostrato che a) $\Rightarrow$ b).

(2) Per un $x \in E$ sia $L_x^* = \{\lambda \in L \mid x \in V_\lambda\}$ e poniamo $\mathrm{St}\,(x \mid V_\lambda)_{\lambda \in L} = \bigcup\limits_{\lambda \in L_x^*} V_\lambda$. Allora la stella di $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ è la famiglia di parti di E $(\mathrm{St}\,(x \mid V_\lambda)_{\lambda \in L})_{x \in E}$.

b) $\Rightarrow$ a). Supponiamo ora che b) sia vera e che $(U_\iota)_{\iota \in I}$ sia un ricovrimento aperto di E. Allora esiste un ricovrimento aperto localmente finito $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ di E tale che sia un $\boldsymbol{a}$–quasi raffinamento di $(U_\iota)_{\iota \in I}$ (def. 2). In forza della normalità di E, in forza del lemma 3 e della prop. 5, § 3 di [1], esiste un ricovrimento aperto $(W_k)_{k \in K}$ di E la cui stella sia un raffinamento di $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$.

Sia $x \in E$. Allora, se è X parte di E contenuta in $\mathrm{St}(x \mid W_k)_{k \in K}$ con card. $(X) \leq \boldsymbol{a}$, poiché esiste un $\lambda \in L$ tale che $\mathrm{St}(x \mid W_k)_{k \in K} \subset V_\lambda$, in forza della def. 2, esiste $\iota \in I$ tale che sia $X \subset U_\iota$. Dunque è vera la a).

COROLLARIO (Morita). – *Se* $\boldsymbol{a}$ *è infinito, ogni spazio* « almost–$\boldsymbol{a}$–fully normal » (def. 5) *è* $\boldsymbol{a}$*–paracompatto* (def. 3).

Si traggono ora alcune conseguenze di quanto sopra esposto.

PROP. 4. – *Se* E *è uno spazio topologico* « almost–$\boldsymbol{a}$–fully normal », *con* $\boldsymbol{a}$ *infinito, allora ogni ricovrimento aperto di* E *che abbia cardinalità puntuale inferiore ad* $\boldsymbol{a}$ (def. 1), *ha un raffinamento aperto localmente finito.*

Dim. – La tesi consegue dalla prop. 3, dalla def. 4 e dal lemma 1.

PROP. 5. – *Se* E *è uno spazio topologico* « almost–$\boldsymbol{a}$–fully normal », *con* $\boldsymbol{a}$ *infinito, e se ogni ricovrimento aperto di* E *ha un raffinamento aperto che abbia cardinalità puntuale inferiore ad* $\boldsymbol{a}$ (def. 1), *allora* E *è paracompatto.*

Questa proposizione generalizza la prop. 5.10 di [2].

PROP. 6. – *Se* E *è uno spazio topologico* « almost–$\boldsymbol{a}$–fully normal », *con* $\boldsymbol{a}$ *infinito, e se* E *ha una base* $\mathfrak{B}$ *per la sua topologia che abbia cardinalità puntuale inferiore ad* $\boldsymbol{a}$, *allora* E *è paracompatto.*

Osservazione 1. – Ciò accade se, più in particolare, risulta $\mathrm{card}(\mathfrak{B}) \leq \boldsymbol{a}$.

Osservazione 2. – Se nella prop. 5 risulta $\boldsymbol{a} = \mathrm{card}\,(\mathbf{N})$, si deduce che se lo spazio topologico E è « almost–$\boldsymbol{a}$–fully normal » e ogni suo ricovrimento aperto ha un raffinamento puntualmente numerabile, allora E è paracompatto.

Osservazione 3. – Nella prop. 6 può assumersi $\boldsymbol{a} = \mathrm{card.}\,(\mathbf{N})$ e si deduce che se lo spazio topologico E ha una base puntualmente numerabile ed è « almost–$\boldsymbol{a}$–fully normal », allora E è paracompatto.

La seguente proposizione generalizza la prop. 2.5 di [2].

PROP. 7. – *Se* E *è uno spazio topologico* « almost–$\boldsymbol{a}$–fully normal », *con* $\boldsymbol{a}$ *infinito, se* E *è regolare e se esiste una parte* B *di* E *ovunque densa e tale che* card $(B) \leq \boldsymbol{a}$, *allora* E *è paracompatto.*

Dim. – Sia $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un qualunque ricovrimento aperto di E.

Poiché E è regolare esiste un ricovrimento aperto $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ di E tale che per ogni $\lambda \in L$ esista un $\iota \in I$ tale che $\overline{V}_\lambda \subset U_\iota$.

Per la prop. 3 E è fortemente $\boldsymbol{a}$–paracompatto e quindi esiste un ricovrimento aperto localmente finito $(W_k)_{k \in K}$ di E che è un $\boldsymbol{a}$–quasi raffinamento di $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ (def. 2). Sia $k \in K$: evidentemente è card $(W_k \cap B) \leq \boldsymbol{a}$ e quindi esiste $\lambda \in L$ tale che $W_k \cap B \subset V_\lambda$. Ora, se è $x \in \overline{W}_\lambda$ e se U è un intorno aperto di x si ha $W_k \cap U \neq \emptyset$: poiché $W_k \cap U$ è anche aperto e B è ovunque denso si ha $(W_k \cap B) \cap U = (W_k \cap U) \cap B \neq \emptyset$ e quindi è $x \in \overline{W_k \cap B}$ donde

$\overline{W}_k \subset \overline{W_k \cap B} \subset \overline{V}_\lambda$. Per la definizione di $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ esiste $\iota \in I$ tale che sia $\overline{V}_\lambda \subset U_\iota$. Consegue $\overline{W}_k \subset U_\iota$ e quindi E è paracompatto.

Osservazione. – Più particolarmente interessante è il caso in cui sia $\boldsymbol{a} = \text{card}(\mathbf{N})$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] AQUARO G., *Ricovrimenti aperti e strutture uniformi sopra uno spazio topologico*, « Annali di Mat. pura ed appl », (IV), vol. XLVII, pp. 319–390 (1959).

[2] MANSFIELD M. J., *Some generalizations of full normality*, « Trans. Amer. Math. Soc. », vol. *86*, pp. 489–505 (1957).

[3] MORITA K., *Paracompactness and product spaces*, « Fundam. Math. », vol. *50*, pp. 223–236 (1962).