Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Jaime Campos Ferreira

Sur la notion de limite d'une distribution à l'infini

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.6, p. 819–823.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_6_819_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Matematica. — *Sur la notion de limite d'une distribution à l'infini.* Nota di JAIME CAMPOS FERREIRA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1. Les notions de valeur et de limite d'une distribution en un point $a \in \mathbf{R}$ ont été introduites par M. S. Lojasiewicz [1] et [2], et généralisées au cas des distributions à plusieurs variables par le même mathématicien [3]. D'autre part, des notions de limite d'une distribution $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini, ont été definies par MM. Mikusiński et Sikorski [4], et aussi, d'une façon non équivalente, par M. Sebastião e Silva [5]. Nous rappellons ci-dessous la définition de M. Sebastião e Silva, sous une forme adaptée aux buts de cette note:

On dit que la distribution $f(x)$ converge vers un nombre λ lorsque $x \to +\infty$ (resp. $x \to -\infty$) s'il existe un entier $n \geq 0$ et une function F, continue dans un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$), tels qu'on ait, dans ce voisinage:

$$f(x) = \mathrm{D}^n \frac{x^n}{n!} \mathrm{F}(x), \tag{1}$$

avec $\mathrm{F}(+\infty) = \lambda$ [resp. $\mathrm{F}(-\infty) = \lambda$], au sens usuel.

Il est très aisé de voir que cette définition généralise la notion usuelle de limite d'une fonction, dont beaucoup de propriétés essentielles sont conservées.

Cette extension peut être utilisée, en particulier, pour définir l'intégrale d'une distribution f sur $\mathbf{R}$: on dit que f est intégrable s'il existe une distribution g, avec des limites $g(+\infty)$ et $g(-\infty)$, telle que $f = \mathrm{D}g$; dans cette hypothèse on pose, naturellement:

$$\int_{\mathbf{R}} f = g(+\infty) - g(-\infty).$$

Dans l'étude des propriétés de ces notions et, nommément, dans la recherche de conditions pour que l'on puisse changer l'ordre des opérations d'intégration et de passage à la limite d'une suite de distributions, nous avons été amené à considérer une nouvelle définition de limite, qui nous semble très naturelle et plus générale que celle de M. Sebastião e Silva citée ci-dessus. Cette définition nous a permis d'obtenir aisément une condition nécessaire et suffisante, pour que la limite f d'une suite f_n de distributions convergentes lorsque $x \to \infty$, soit encore une distribution convergente et aussi des conditions concernant la possibilité de changer l'ordre de l'intégration et de la passage à la limite, ce que nous n'avons pas réussi à obtenir en employant la définition de M. S. e Silva.

(*) Nella seduta del 17 giugno 1965.

Dans cette Note, nous donnons notre définition de limite et quelques–unes de ces propriétés élémentaires; nous laissons pour une Note prochaine l'indication de quelques avantages de cette définition et, en particulier, l'exposition des derniers résultats cités ci–dessus.

2. On commence par introduire les notions de limite supérieure et de limite inférieure d'une distribution $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$. On se bornera d'abord à considérer des distributions à « valeurs réelles » c'est–à–dire, des distributions qui, dans chaque intervalle compact de **R** contenu dans leur domaine, sont des dérivées généralisées de fonctions continues réelles. Evidemment, on peut étendre ces notions au cas des distributions « complexes »; à ce but il suffit de considérer séparément les parties « réelle » et « imaginaire » de la distribution envisagée.

Soit alors f une distribution (réelle) définie dans un voisinage du point $+\infty$ et supposons qu'il existe un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbf{R}$, non borné à droite, dans lequel f soit une distribution d'ordre fini. Alors, pour chaque entier n suffisament grand, on pourra représenter f (dans I) sous la forme:

$$f(x) = \mathrm{D}^n \frac{x^n}{n!} \mathrm{F}_n(x) , \tag{2}$$

F_n étant une fonction réelle, continue dans l'intervalle I.

Représentons par $\overline{\mathrm{F}_n(+\infty)}$ (resp. $\underline{\mathrm{F}_n(-\infty)}$) – ou, en abrégé, par $\overline{\lambda_n}$ (resp. $\underline{\lambda_n}$) – la limite supérieure (resp. inférieure) de la fonction F_n, lorsque $x \to +\infty$.

On peut énoncer maintenant la proposition suivante:

PROPOSITION 1. – *Les limites* $\overline{\lambda_n}, \underline{\lambda_n}$ *ne dépendent pas de la fonction* F_n *considérée dans* (2), *mais seulement de la distribution* f *et du nombre* n. *En plus on a, pour toutes les valeurs de* n *considérées*:

$$\overline{\lambda_n} \geq \overline{\lambda_{n+1}} \geq \underline{\lambda_{n+1}} \geq \underline{\lambda_n} .$$

Dem. – Pour la première partie, il suffit d'observer que si, en plus de (2), on a:

$$f(x) = \mathrm{D}^n \frac{x^n}{n!} \mathrm{F}_n^*(x) ,$$

F_n^* étant aussi une fonction réelle continue dans l'intervalle I, on doit avoir:

$$\mathrm{F}_n(x) - \mathrm{F}_n^*(x) = \frac{\mathrm{P}_n(x)}{x^n} ,$$

où P_n représente la restriction à I d'un polynôme de degré $< n$, à coefficients réels; on voit donc immédiatement qu'on aura: $\overline{\mathrm{F}_n(+\infty)} = \overline{\mathrm{F}_n^*(+\infty)}$ et $\underline{\mathrm{F}_n(+\infty)} = \underline{\mathrm{F}_n^*(+\infty)}$.

Pour la deuxième partie, on peut noter que, si on a:

$$\mathrm{D}^n \frac{x^n}{n!} \mathrm{F}_n(x) = \mathrm{D}^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{F}_{n+1}(x)$$

où F_n et F_{n+1} sont des fonctions réelles continues dans I, et si c est un point arbitraire de cet intervalle, on aura aussi:

$$F_{n+1}(x) - \frac{n+1}{x^{n+1}} \int_c^x \xi^n F_n(\xi)\, d\xi = \frac{\pi_{n+1}(x)}{x^{n+1}} \tag{3}$$

(où π_{n+1} est un polynome de degré $< n+1$).

Mais, si l'on suppose que le point c a été choisi de telle façon que, pour $x > c$, on ait:

$$\underline{\lambda}_n - \varepsilon < F_n(x) < \overline{\lambda}_n + \varepsilon$$

ε étant un nombre positif arbitraire, on voit qu'on doit avoir, pour $x > c$:

$$(\underline{\lambda}_n - \varepsilon)\left[1 - \left(\frac{c}{x}\right)^{n+1}\right] < \frac{n+1}{x^{n+1}} \int_c^x \xi^n F_n(\xi)\, d\xi < (\overline{\lambda}_n + \varepsilon)\left[1 - \left(\frac{c}{x}\right)^{n+1}\right]$$

d'où, compte tenue de (3), on déduit immédiatement les relations:

$$\overline{\lambda}_n \geq \overline{\lambda_{n+1}} \quad , \quad \underline{\lambda}_n \leq \underline{\lambda_{n+1}},$$

qu'il nous fallait démontrer.

Maintenant, si l'on pose $\overline{\lambda} = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{\lambda}_n$, $\underline{\lambda} = \lim\limits_{n\to\infty} \underline{\lambda}_n$, il semble naturel de dire que $\overline{\lambda}$ (resp. $\underline{\lambda}$) est la limite supérieure (resp. inférieure) de la distribution f, lorsque $x \to +\infty$: $\overline{f(+\infty)} = \overline{\lambda}$, $\underline{f(+\infty)} = \underline{\lambda}$.

Evidemment, on aura toujours: $+\infty \geq \overline{f(+\infty)} \geq \underline{f(+\infty)} \geq -\infty$. On peut introduire maintenant la définition suivante:

DEFINITION 1. – On dit que la distribution f est *convergente* lorsque $x \to +\infty$, si (et seulement si) on a: $+\infty > \overline{f(+\infty)} = \underline{f(+\infty)} > -\infty$; dans cette hypothèse, le nombre $\overline{f(+\infty)} = \underline{f(+\infty)}$ est appellé la *limite* de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$ et représenté par $f(+\infty)$.

On définirait d'une façon analogue les limites $\overline{f(-\infty)}$, $\underline{f(-\infty)}$ et $f(-\infty)$ (en supposant que f est une distribution réelle d'ordre fini dans un voisinage du point $-\infty$).

Si f est une distribution complexe (c'est-à-dire, une distribution usuelle), on peut évidemment obtenir une et une seule décomposition de la forme:

$$f = f_1 + i f_2,$$

f_1 et f_2 étant des distributions réelles. Alors on posera, en supposant encore que f est une distribution d'ordre fini dans un voisinage du point $+\infty$:

DEFINITION 2. – On appelle *limite supérieure* (resp. *inférieure*) de $f(x)$, lorsque $x \to +\infty$, le nombre:

$$\overline{f_1(+\infty)} + i\,\overline{f_2(+\infty)} \quad , \quad [\text{resp. } \underline{f_1(+\infty)} + i\,\underline{f_2(+\infty)}],$$

noté encore $\overline{f(+\infty)}$ (resp. $\underline{f(+\infty)}$). On dit que la distrbution f est *convergente* lorsque $x \to +\infty$, si on a $\overline{f(+\infty)} = \underline{f(+\infty)} \in \mathbf{C}$; alors on pose:

$$f(+\infty) = f_1(+\infty) + i f_2(+\infty).$$

Evidemment, les limites $\overline{f(-\infty)}$, $\underline{f(-\infty)}$, $f(-\infty)$ seraient définies d'une façon analogue. On peut observer que l'existence de la limite $f(+\infty)$ ou $f(-\infty)$, au sens de Silva, entraîne l'existence de la même limite au sens de la définition précédente (avec la même valeur), tandis que la réciproque est probablement fausse. À ce propos, il convient de rappeller que, si f est une distribution convergente (lorsque $x \to +\infty$, par exemple) au sens de Silva, on peut dire que la limite $f(+\infty)$ est d'ordre n si n est le plus petit entier pour lequel f peut être représentée sous la forme (1), F étant une fonction continue convergente au sens usuel lorsque $x \to +\infty$. Avec cette convention, on pourrait dire que les distributions convergentes au sens de Silva sont celles qui, au sens de la définition 2, ont une limite d'ordre fini. Bien que nous n'ayons pas réussi à trouver un exemple d'une distribution convergente dont la limite ne soit pas d'ordre fini, il nous semble raisonnable d'admettre qu'il existe de telles distributions.

3. Nous indiquerons maintenant quelques propriétés simples de la notion de limite introduite au § 2, sans en donner les démonstrations (qui sont d'ailleurs très faciles). L'unicité et le caractère local de cette limite étant évidents, et bien aussi le fait qu'elle généralise la limite usuelle pour les fonctions, nous nous bornerons à énoncer les propositions suivantes:

PROPOSITION 2. – *Pour qu'une distribution réelle f soit convergente lorsque $x \to +\infty$, il faut et il suffit que, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \geq 0$ un intervalle* I *non borné à droite et une fonction réelle* F, *continue dans* I *et dont l'oscillation dans cet intervalle soit $< \varepsilon$, tels qu'on ait $f(x) = D^n \frac{x^n}{n!} f(x)$ dans* I. (Evidemment, cette proposition peut être immédiatement adaptée au cas des distributions complexes).

PROPOSITION 3. – *Si f et g sont des distributions (définies dans un même domaine) convergentes lorsque $x \to +\infty$, et si $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, alors la distribution $h = \alpha f + \beta g$ est aussi convergente lorsque $x \to +\infty$ et on a:*

$$h(+\infty) = \alpha f(+\infty) + \beta g(+\infty).$$

PROPOSITION 4. – *Si f est une distribution convergente lorsque $x \to +\infty$, alors sa dérivée f' est aussi convergente lorsque $x \to +\infty$ et on a $f'(+\infty) = 0$ (cette limite étant toujours d'ordre fini).*

PROPOSITION 5. – *Soit f une distribution convergente lorsque $x \to +\infty$, α une fonction de classe C^∞ dans le domaine de f, convergente au sens usuel lorsque $x \to +\infty$ et telle que, pour chaque entier $k > 0$, on ait (au sens usuel):*

$$\lim_{x \to +\infty} x^k \alpha^{(k)}(x) = 0.$$

Alors la distribution αf *est convergente lorsque* $x \to +\infty$ *et on a:*

$$(\alpha f)(+\infty) = \alpha(+\infty) f(+\infty) .$$

PROPOSITION 6. – *Soit* f *une distribution définie dans un intervalle* I *et convergente lorsque* $x \to +\infty$, φ *une fonction de classe* C^∞, *définie dans un intervalle* I^* *(non borné à droite) et à valeurs dans* I, *telle que* $\varphi'(t) \neq 0$ *dans chaque point* $t \in I^*$ *et qu'on ait aussi, au sens usuel:*

$$i) \quad \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty ,$$

$$ii) \quad \lim_{t \to +\infty} \varphi'(t) \in \mathbf{R} - \{0\} ,$$

$$iii) \quad \lim_{t \to +\infty} t^{k-1} \varphi^{(k)}(t) = 0 , \qquad \text{pour} \quad k = 2, 3, \cdots .$$

Alors, si l'on pose $g(t) = f(\varphi(t))$, *la distribution* g *est convergente lorsque* $t \to +\infty$ *et on a:* $g(+\infty) = f(+\infty)$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] S. LOJASIEWICZ, *Sur la valeur d'une distribution dans un point*, « Bull. Acad. Polon. des Sciences », Cl. III, 4 (1956).

[2] S. LOJASIEWICZ, *Sur la valeur et la limite d'une distribution en un point*, « Studia Math. », *16* (1957).

[3] S. LOJASIEWICZ, *Sur la fixation des variables dans une distribution*, « Studia Math. », *17* (1958).

[4] MIKUSIŃSKI–SIKORSKI, *Théorie élémentaire des distributions*. Gauth. Villars, Paris (1964).

[5] J. SEBASTIÃO e SILVA, *Novos elementos para a teoria do integral no campo das distribuições*, « Boletim da Academia de Ciências de Lisboa » (1963).

[6] J. SEBASTIÃO e SILVA, *Theory of distributions*. Notes polycopiées d'un cours à l'Université de Maryland (1964).

[7] J. SEBASTIÃO e SILVA, *Integrals and orders of growth of distributions*. Cours d'été sur la théorie des distributions (1964), (à paraître).