
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

M. HARRY COHN

Quelques théorèmes limites pour une classe de variables aléatoires dépendantes

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 38 (1965), n.6, p. 815–818.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_6_815_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Calcolo delle probabilità. — *Quelques théorèmes limites pour une classe de variables aléatoires dépendantes.* Nota di M. HARRY COHN, presentata (*) dal Corrisp. G. FICHERA.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ un espace de probabilité, $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$, $\mathcal{H}_a^b$ la σ -algèbre engendrée par les événements $\{\omega \mid (X_{i_1}(\omega), \dots, X_{i_k}(\omega)) \in H, a \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq b, H \in \mathcal{B}^k\}$, $\mathcal{B}^k$ étant la famille des ensembles boréliens k -dimensionnels.

Nous supposons que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfait à la condition

$$(I) \quad |P(AB) - P(A)P(B)| \leq \varphi(n)P(A)$$

où $A \in \mathcal{H}_1^k$, $B \in \mathcal{H}_{k+n}^\infty$ pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi(l) < 1$ pour un $l \in \mathbb{N}^*$.

Les processus de Markov qui satisfont à la condition de Döebelin, les processus m -dépendants, des certaines classes de processus stationnaires [5], de chaînes à liaisons complètes [6], de chaînes d'ordre infini, sont quelques exemples de processus aléatoires qui satisfont à la condition (I).

Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements tels que $\{\chi_{A_n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfait à la condition (I), χ_A étant l'indicateur de l'ensemble A .

THÉORÈME 1. — *La condition nécessaire et suffisante pour que*

$$P(\limsup A_n) = 0 \quad \text{est} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

THÉORÈME 2. — *Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = 0$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ on a*

$$P(\limsup A_n) = 0 \quad \text{et si} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty, \quad \text{on a} \quad P(\limsup A_n) = 1.$$

THÉORÈME 3. — *Si l'existe un nombre $l \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $\varphi(l) < 1/2$ et si $\Lambda \in \mathcal{H}_n^\infty$ on a $P(\Lambda) = 0$ ou $P(\Lambda) = 1$.*

Posons

$$f(l) = 1 - \varphi(l), \quad S_n^{(k)} = \sum_{i=0}^n X_{il+k}, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\alpha(X_{l+k}, \dots, X_{nl+k}) = \max_{1 \leq m \leq n} D(X_{ml+k} + \dots + X_{nl+k}).$$

THÉORÈME 4. — *Si l est le premier nombre pour lequel $\varphi(l) < 1$ et si pour chaque $k, 1 \leq k \leq l$*

$$\frac{4}{\varepsilon^2} \alpha(X_{l+k}, \dots, X_{nl+k}) < f(l)$$

(*) Nella seduta del 17 giugno 1965.

pour tout n , $tl \leq n \leq (t+1)l$ on a

$$P\left(\max_{1 \leq m \leq n} |S_m| \geq \varepsilon\right) \leq \sum_{k=1}^l \frac{\frac{4}{\varepsilon^2} D(S_n^{(k)})}{f(l) - \frac{4}{\varepsilon^2} \alpha(X_{l+k}, \dots, X_{tl+k})}.$$

Démonstration. - Notons

$$A_0 = \{\omega \mid |S_0^{(k)}| > \varepsilon\}$$

$$A_m = \{\omega \mid |S_0^{(k)}| < \varepsilon, \dots, |S_{m-1}^{(k)}| < \varepsilon, |S_m^{(k)}| \geq \varepsilon\} \quad m = 1, 2, \dots$$

$$B_m = \left\{\omega \mid |S_t^{(k)} - S_m^{(k)}| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$C = \left\{\omega \mid |S_t^{(k)}| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

On voit facilement que $C \supset \sum_{m=0}^t A_m B_m$.

En utilisant la condition (I), nous obtenons

$$(I) \quad P\left(\sum_{m=0}^t A_m B_m\right) = \sum_{m=0}^t P(A_m B_m) \geq \sum_{m=0}^t (P(A_m) P(B_m) - (1 - f(l)) P(A_m)).$$

Mais l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff implique

$$P(B_m) = P\left(\left|\omega\right| \left|\sum_{i=m+1}^t X_{il+k}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\right) \geq 1 - \frac{4 D\left(\sum_{i=m+1}^t X_{il+k}\right)}{\varepsilon^2}$$

et par conséquent

$$\min_{0 \leq m \leq t} P(B_m) \geq 1 - \frac{4 \alpha(X_{l+k}, \dots, X_{tl+k})}{\varepsilon^2}.$$

Compte tenu de l'inégalité ci-dessus, la relation (I) devient

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{m=0}^t A_m B_m\right) &\geq \left(f(l) - \frac{4 \alpha(X_{l+k}, \dots, X_{tl+k})}{\varepsilon^2}\right) \sum_{m=0}^t P(A_m) = \\ &= \left(f(l) - \frac{4 \alpha(X_{l+k}, \dots, X_{tl+k})}{\varepsilon^2}\right) P\left(\max_{0 \leq m \leq t} |S_m^{(k)}| \geq \varepsilon\right). \end{aligned}$$

D'autre part

$$P\left(\sum_{m=0}^t A_m B_m\right) \leq P(C) \leq \frac{4}{\varepsilon^2} D(S_n^{(k)})$$

d'où en vertu de la condition du théorème, on obtient

$$P\left(\max_{0 \leq m \leq t} |S_m^{(k)}| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\frac{4}{\varepsilon^2} D(S_n^{(k)})}{f(l) - \frac{4}{\varepsilon^2} \alpha(X_{l+k}, \dots, X_{tl+k})}.$$

Enfin, les inégalités

$$P(\max_{1 \leq m \leq n} |S_m| \geq \varepsilon) \leq P(\max_{1 \leq m \leq (l+1)l} |S_m| \geq \varepsilon) \leq \sum_{k=1}^l P\left(\max_{0 \leq m \leq l} |S_m^{(k)}| \geq \frac{\varepsilon}{l}\right)$$

achèvent la démonstration du théorème.

LEMMA 1. — Si $E(X_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$, on a

$$D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \leq (1 + 2\gamma_n) \sum_{i=1}^n D(X_i)$$

où $\gamma_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^{1/2}$ et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont des nombres réelles qui vérifient la relation

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \varepsilon_n P(A)$$

où $A \in \mathfrak{N}_k^k$ et $B \in \mathfrak{N}_{k+n}^{k+n}$ pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$.

THÉORÈME 5. — Si $D(X_n) < M^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M étant une constante positive et si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{2^n} < \infty$, $\frac{S_n - E(S_n)}{n}$ converge presque sûrement vers zéro.

THÉORÈME 6. — Si $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{1/2} < \infty$ et si les variables $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont la même fonction de répartition, la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de S_n/n est $E(X_1) < \infty$. Dans ce cas $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = E(X_1)$ avec la probabilité 1.

THÉORÈME 7. — Si $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{1/2} < \infty$ et si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(X_n)}{n^2} < \infty$, $\frac{S_n - E(S_n)}{n}$ converge presque sûrement vers zéro.

Remarquons que les théorèmes 5, 6, et 7 contiennent comme des cas particuliers les théorèmes de A. N. Kolmogorov, concernant les variables aléatoires indépendantes.

Les démonstrations des théorèmes énoncés utilisent les résultats établis dans les travaux [1], [5], [7] et [8].

2. Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ un processus de Markov non homogène et $P(x, A)$ une probabilité de passage.

Posons

$$Q(P) = \sup_{A, x, y} |P(x, A) - P(y, A)|$$

$\alpha(P) = 1 - Q(P)$ est dit coefficient ergodique [2], [3]. On peut montrer que si P et P' sont deux probabilités de passage, on a

$$Q(P \circ P') \leq Q(P) Q(P').$$

Posons $\alpha_{ij} = Q(P_{i+1} \circ \dots \circ P_j)$ pour $i < j$, où P_n est la $n^{\text{ième}}$ probabilité de passage de la chaîne $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$

Considérons les conditions suivantes:

(C₁) Il existe un nombre δ , $0 < \delta \leq 1$ et un nombre $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha_{i, i+l} > \delta$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$;

(C₂) Il existe un nombre δ , $0 < \delta \leq 1$ et un nombre α , $0 < \alpha < 1$ tel que si l_n est le plus petit nombre pour lequel $\alpha_{i, i+l_n} > \delta$ $i = 1, \dots, n - l_n$, $n = q^\nu \cdot q > 1$, $\nu = 1, 2, \dots$ on a $l_n \sim n^\alpha$.

THÉORÈME 8. — Si $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfait à la condition (C₁) et si
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(X_n)}{n^2} < \infty, \quad \frac{S_n - E(S_n)}{n} \text{ converge presque sûrement vers zero.}$$

THÉORÈME 9. — Si les variables $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ayant la même loi de probabilité, satisfont à la condition (C₁), pour que S_n/n converge presque sûrement, il faut et il suffit que $|E(X_1)| < \infty$. Dans ce cas, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = E(X_1)$ avec la probabilité 1.

THÉORÈME 10. — Si $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfait à la condition (C₂) et si
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n D(X_i)}{n^\alpha} < \infty \text{ où } 0 < \beta < 2 \text{ et } \alpha < \frac{2-\beta}{2}, \quad \frac{S_n - E(S_n)}{n} \text{ converge presque sûrement vers zéro.}$$

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. R. BLUM, D. L. HANSON, L. KOOPMANS, « Z. Wahrscheinlichkeitstheorie », 2, 1-11 (1963).
- [2] H. COHN, « C.R. Acad. Sc. Paris », 259, 3423-3426 (1964).
- [3] E. B. DINKIN, « Ukrain. Math. J. », 6, 21-29 (1954) (en russe).
- [4] R. DOBRUSCHIN, « Teor. Veroiatn. i prim. », 1, 72-86, 365-425 (1956) (en russe).
- [5] I. A. IBRAGIMOV, « Teor. Veroiatn. i prim. », 7, nr. 7, 361-392 (1962), (en russe).
- [6] O. ONICESCU et G. MIHOC, « C.R. Acad. Sci. », 200, 511 (1935).
- [7] G. OTTAVIANI, « Giornale dell'Istituto degli Attuari », X, 10-40 (1939).
- [8] T. UENO, « Journal of the Faculty of Science University of Tokyo », VII, 449-462, 557-575 (1957).

RÉSUMÉ. — Extensions aux variables aléatoires dépendants d'un certain type, du théorème de Borel-Cantelli, de la loi 0-1, de l'inégalité de A. N. Kolmogorov et de quelques variantes de la loi forte de grands nombres. Dans la démonstration de l'inégalité généralisée de Kolmogorov on utilise une méthode due à G. Ottaviani [7]. On donne aussi des applications pour les processus de Markov non homogènes.