Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Vassili Corbas

Determinazione di una classe di gruppi di permutazioni semplicemente transitivi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.6, p. 808–809.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_6_808_0>

Algebra. — *Determinazione di una classe di gruppi di permutazioni semplicemente transitivi.* Nota [(*)] di VASSILI CORBAS, presentata [(**)] dal Socio B. SEGRE.

In questa Nota enunciamo, senza dimostrazione [(1)], un teorema che caratterizza completamente una classe di gruppi di permutazioni semplicemente transitivi soddisfacenti a certe proprietà di cui diremo fra breve. Chiudono la Nota alcune osservazioni riguardanti una generalizzazione del nostro teorema al caso di gruppi k–transitivi, con $k > 1$, e alcuni problemi che saranno l'argomento di una nostra prossima ricerca.

Premettiamo alcune definizioni e simbolismi che useremo nel seguito [(2)]. Sia G un gruppo di permutazioni sull'insieme $\Omega = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$; diremo che G è gruppo di *grado* m. Se $\Delta = \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_k}\} \subseteq \Omega$, denoteremo con $G_{\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k}}$ o semplicemente con G_Δ *lo stabilizzatore* di Δ, ossia il sottogruppo formato da tutti gli elementi di G, ciascuno dei quali fissa Δ elemento per elemento.

Cioè:

$$G_\Delta = \{g \in G \mid \alpha g = \alpha, \forall \alpha \in \Delta\},$$

dove con αg indichiamo l'immagine di α mediante la permutazione g. Inoltre, se H è un sottogruppo di G, indicheremo con $|H|$ il suo ordine.

Sia G un gruppo di permutazioni – sull'insieme Ω – soddisfacente alle seguenti proprietà.

(i) G è transitivo su Ω;

(ii) se $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega$, allora $|G_{\alpha\beta\gamma}| = 1$ e $|G_{\alpha\beta}| \leq 2$;

(iii) $\exists\, \alpha, \beta \in \Omega : \{u\} \neq G_{\alpha\beta} \neq G_\alpha \neq \{u\}$,

dove con $\{u\}$ abbiamo indicato il sottogruppo di G formato dal solo elemento neutro, u.

Per gruppi siffatti abbiamo dimostrato il seguente teorema, che li caratterizza completamente:

TEOREMA. – *Se* G *è un gruppo di permutazioni – sull'insieme* Ω *– soddisfacente alle condizioni* (i), (ii), (iii), *allora o* G *è il gruppo simmetrico* S_4 *su quattro elementi oppure* G è *uno di due gruppi di ordine* 60 *e rispettivamente di grado* 6 *e* 10, *tutt'e due isomorfi* (*come gruppi astratti*) *al gruppo alterno* A_5 *su cinque elementi. Viceversa, il gruppo simmetrico* S_4 *soddisfa alle condizioni* (i),

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del 17° gruppo di ricerca del C.N.R.

(**) Nella seduta del 17 giugno 1965.

(1) Le dimostrazioni dei risultati contenuti in questa Nota appariranno, invece, in una Nota successiva.

(2) Per ulteriori chiarimenti riguardanti i simboli da noi scelti e alcune ben note proprietà sui gruppi di permutazioni qui usate rinviamo a [1].

(ii) *e* (iii), *e il gruppo alterno* A_5 *può essere rappresentato in due modi diversi come un gruppo rispettivamente di grado* 6 *e* 10, *soddisfacente alle condizioni* (i), (ii), (iii).

Ora è facile generalizzare le condizioni (i), (ii), (iii), trasportandole al caso di un gruppo di permutazioni k–transitivo sull'insieme Ω. Più precisamente, consideriamo un gruppo G di permutazioni – sull'insieme Ω – soddisfacente alle seguenti proprietà

(I) G è k–transitivo su Ω;

(II) se $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_{k+2}} \in \Omega$, allora $|G_{\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_{k+2}}}| = 1$ e $|G_{\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_{k+1}}}| \leq 2$;

(III) $\exists\, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_{k+1}} \in \Omega$:
$\{u\} \neq G_{\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_{k+1}}} \neq G_{\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k}} \neq \{u\}$.

Evidentemente, se $k = 1$ le condizioni (I), (II), (III) vengono a coincidere colle (i), (ii), (iii).

Per gruppi siffatti, abbiamo dimostrato il seguente.

TEOREMA. – *Se* G *è un gruppo di permutazione – sull'insieme* Ω *– soddisfacente alle condizioni* (I), (II), (III), *con* $k > 1$, *allora o* G *è il gruppo simmetrico* S_m *su* $m = k + 3$ *elementi, oppure* $k = 2$ *ed il gruppo* G *è isomorfo al gruppo lineare unimodulare delle matrici quadrate del* 2° *ordine su* GF (11), *od infine* $k = 3$, $m = 12$ *ed il gruppo* G *è isomorfo* (*come gruppo astratto*) *al gruppo di Mathieu* M_{11} *su* 11 *elementi.*

La dimostrazione di questo teorema si basa sul fatto che un gruppo soddisfacente alle condizioni (I), (II), (III), con $k > 1$, contiene un sottogruppo di permutazioni – su $m - k + 1$ elementi – soddisfacente alle condizioni (i), (ii), (iii); si usa quindi il teorema precedente, congiuntamente ad alcuni ben noti teoremi che porgono dei limiti per il grado di transitività dei gruppi di permutazioni.

In una prossima ricerca studieremo anche – più generalmente – i gruppi di permutazioni soddisfacenti soltanto alle condizioni (i), (ii) ed alla

(iii)' $$\exists\, \alpha \in \Omega : |G_\alpha| \neq 1.$$

Naturalmente, il numero dei gruppi appartenenti a questa classe non è finito: essa contiene già i gruppi di Frobenius (cioè i gruppi G transitivi su Ω – con $|G| \neq |\Omega|$ – tali che, se $\alpha, \beta \in \Omega$, allora $|G_{\alpha\beta}| = 1$) ed i gruppi diedrali d'ordine $2n$ con n pari.

BIBLIOGRAFIA.

[1] H. WIELANDT, *Finite permutation groups* (Academic Press, New York and London, 1964).

SUMMARY. — This Note gives the complete determination of a class of transitive finite permutation groups [satisfying conditions (i), (ii), (iii) or (I), (II), (III) above].