
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIOVANNI PROUSE

Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione non omogenea delle onde, con termine dissipativo non lineare. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 38 (1965), n.6, p. 804–807.
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_6_804_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione non omogenea delle onde, con termine dissipativo non lineare* (*). Nota I di GIOVANNI PROUSE, presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

1. Sia Ω un aperto limitato e connesso $\in S^m$, con $m \leq 5$, dotato della proprietà di cono e sia Γ la sua frontiera.

Consideriamo l'equazione generale delle onde, in forma operazionale

$$(1.1) \quad u''(\eta) - Au(\eta) + \beta(u'(\eta)) = f(\eta) \quad (\eta \in J \equiv (-\infty, +\infty))$$

con $u(\eta) = \{u(x, \eta); x \in \Omega\}$, $f(\eta) = \{f(x, \eta); x \in \Omega\}$; ammetteremo sempre, nel seguito, che le soluzioni soddisfino alla condizione al contorno

$$(1.2) \quad u|_{\Gamma \times J} = 0.$$

Diremo che $u(\eta)$ è una soluzione in J della (1.1) corrispondente al problema (1.2) se ⁽¹⁾:

- (a₁) $u(\eta) \in L_{\text{loc}}^\infty(J; H_0^1)$, $u'(\eta) \in L_{\text{loc}}^\infty(J; H_0^1)$, $u''(\eta) \in L_{\text{loc}}^\infty(J; L^2)$;
 (b₁) $u(\eta)$ soddisfa all'equazione

$$(1.3) \quad \int_J \{ (u''(\eta), h(\eta))_{L^2} + (u(\eta), h(\eta))_{H_0^1} + (\beta(u'(\eta)), h(\eta))_{L^2} - (f(\eta), h(\eta))_{L^2} \} d\eta = 0$$

per ogni $h(\eta) \in L_{\text{loc}}^2(J; H_0^1)$, a supporto compatto.

Nella (1.3) si è posto (in accordo con la definizione dell'operatore A)

$$(1.4) \quad (u, v)_{H_0^1} = \int_{\Omega} \left[\sum_{j,k=1}^m a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} + a(x) uv \right] d\Omega.$$

Supporremo, nel seguito, che siano verificate le seguenti condizioni.

- (a₂) $\beta(\xi)$ sia una funzione monotona e derivabile con $\beta(0) = 0$ e

$$(1.5) \quad h(1 + |\xi|^{q-1}) \leq \beta'(\xi) \leq k(1 + |\xi|^{q-1}),$$

essendo h, k due opportune costanti positive;

- (b₂) risulti

$$(1.6) \quad 1 \leq \rho \leq 1 + \frac{4}{m-1} \quad (m \leq 5).$$

(*) Istituto matematico del Politecnico di Milano. Gruppo di ricerca n. 12 del Comitato per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 maggio 1965.

(1) Per la definizione delle notazioni usate nella presente Nota rimandiamo a [1].

Osserviamo che l'ipotesi (a_2) è verificata qualora sia, ad esempio,

$$\beta(\xi) = \mu \xi + \nu |\xi|^{q-1} \xi \quad (\mu > 0, \nu > 0).$$

Inoltre la condizione (b_2) porta come conseguenza che, posto $\Delta = [0, 1]$ $Q = \Omega \times \Delta$, l'immersione di $H^1(Q)$ in $L^{q+1}(Q)$ risulta continua, ossia

$$(1.7) \quad \|u\|_{L^{q+1}(Q)} \leq c \|u\|_{H^1(Q)}.$$

Il problema di Cauchy per la (1.1) è stato studiato, per p ed m qualsiasi, da Lions e Strauss [2], [3], i quali hanno dimostrato il seguente teorema di esistenza ed unicità.

Se $f(\eta), f'(\eta) \in L^2_{loc}(J_0; L^2)$ ($J_0 \equiv [0, \infty)$), esiste in J_0 una ed una sola soluzione della (1.1) soddisfacente alle condizioni iniziali.

$$(1.8) \quad u(0) = u_0 \quad u'(0) = u_1,$$

essendo u_0 ed u_1 due arbitrari elementi rispettivamente di $H_0^1 \cap H^2$ ed H_0^1 .

Tale soluzione si ottiene, con il metodo di Faedo-Galerkin, nel modo seguente.

Sia $\{g_j\}$ una successione di elementi $\in H_0^1$, linearmente indipendenti e densi in H_0^1 ; posto

$$(1.9) \quad \begin{aligned} u_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k g_k, & u_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k g_k, \\ u_{0,n} &= \sum_{k=1}^n \varphi_k g_k, & u_{1,n} &= \sum_{k=1}^n \psi_k g_k, \end{aligned}$$

indichiamo con $u_n(\eta) = \sum_{k=1}^n \alpha_{kn}(\eta) g_k$ la soluzione del sistema

$$(1.10) \quad (u_n''(\eta), g_k)_{L^2} + (u_n(\eta), g_k)_{H_0^1} + (\beta(u_n'(\eta)), g_k)_{L^2} - (f(\eta), g_k)_{L^2} = 0$$

$$(k = 1, \dots, n)$$

soddisfacente alle condizioni iniziali $u_n(0) = u_{0,n}, u_n'(0) = u_{1,n}$.

È allora possibile estrarre dalla successione $\{u_n(\eta)\}$ una sottosuccessione (che diremo ancora $\{u_n(\eta)\}$) tale che risulti, per ogni $h_1 \in L^1(\Delta; E)$ e per ogni $t \geq 0$,

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta} (u_n(t+\eta) - u(t+\eta), h_1(\eta))_E d\eta &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta} (u_n'(t+\eta) - u'(t+\eta), h_1(\eta))_E d\eta &= 0. \end{aligned}$$

Nella presente Nota e nelle successive tre ci proponiamo di studiare le soluzioni quasi periodiche della (1.1), generalizzando i risultati ottenuti in un precedente lavoro [1].

Daremo anzitutto alcuni teoremi riguardanti il comportamento asintotico delle soluzioni della (1.1) e l'esistenza di una soluzione E-limitata in J. Si farà poi vedere che, sotto opportune ipotesi, tale soluzione risulta quasi-periodica.

Facendo, da ultimo, un'ipotesi leggermente più restrittiva della (b₂), proveremo un teorema di relativa compattezza della traiettoria della soluzione E-limitata in J.

Dimosteremo precisamente, i seguenti teoremi ⁽²⁾.

TEOREMA 1: *Supponiamo che risulti*

$$(1.12) \quad \sup_{t \in J_0} \|f(t)\|_{L^2} = K_1 < +\infty$$

e sia $u(\eta)$ una soluzione della (1.1) soddisfacente alle condizioni iniziali

$$(1.13) \quad u(0) = u_0 \in H_0^1, \quad u'(0) = u_1 \in L^2.$$

Dette allora K_1^* , K_2^* due quantità dipendenti solo da K_1 , Ω e $\|u(0)\|_E$, risulta

$$(1.14) \quad \sup_{\eta \in J_0} \|u(\eta)\|_E = K_1^* < +\infty, \quad \sup_{t \in J_0} \|u'(t)\|_{L_0^2} = K_2^* < +\infty.$$

TEOREMA 2: *Se, oltre alla (1.12), il termine noto soddisfa alla relazione*

$$(1.15) \quad \sup_{t \in J_0} \|f'(t)\|_{L^2} = K_2 < +\infty$$

e se $u(\eta)$ è la soluzione della (1.1) soddisfacente alle condizioni iniziali

$$(1.16) \quad u(0) = u_0 \in H_0^1 \cap H^2, \quad u'(0) = u_1 \in H_0^1,$$

allora, detta K_3^* una quantità dipendente solo da K_1 , K_2 , Ω , $\|u_0\|_{H^2}$, $\|u_1\|_{H_0^1}$, risulta

$$(1.17) \quad \sup_{\eta \in J_0} \|u'(\eta)\|_E \leq K_3^* < +\infty.$$

TEOREMA 3: *Supponiamo che $f(t) \in L_0^2$, $t \in J$, e che*

$$(1.18) \quad \max \lim_{t \rightarrow +\infty} \|f(t)\|_{L_0^2} < +\infty.$$

Allora tutte le soluzioni della (1.1) sono E-asintotiche fra di loro per $\eta \rightarrow +\infty$. Dette cioè $u_1(\eta)$ e $u_2(\eta)$ due qualsiasi soluzioni, risulta

$$(1.19) \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \|u_1(\eta) - u_2(\eta)\|_E = 0.$$

TEOREMA 4: *Supponiamo che $f(t) \in L_0^2$, $t \in J$, e che*

$$(1.20) \quad \max \lim_{t \rightarrow -\infty} \|f(t)\|_{L^2} < +\infty.$$

(2) I teoremi 1, 2, 3, 4 generalizzano degli analoghi teoremi dimostrati in [1], [4], [5].

Esiste allora tutt'al più una soluzione della (1.1) tale che risulti

$$(1.21) \quad \max_{\eta \rightarrow -\infty} \lim \|u(\eta)\|_E < +\infty.$$

TEOREMA 5: Supponiamo che $f(t)$ ed $f'(t)$ siano L_0^2 -limitate in J . Esiste allora in J una ed una sola soluzione $\tilde{u}(\eta)$ della (1.1) che sia E -limitata in J . Inoltre $\tilde{u}'(\eta)$ risulta pure E -limitata in J ed a $\tilde{u}(\eta)$ tendono asintoticamente, per $\eta \rightarrow +\infty$, tutte le altre soluzioni.

TEOREMA 6: Supponiamo che siano soddisfatte le ipotesi del teorema 5 e che, in luogo della (1.6), valga la condizione, più restrittiva,

$$(1.22) \quad 1 \leq \rho < 1 + \frac{4}{m-1}.$$

Allora la soluzione $\tilde{u}(\eta)$, E -limitata in J , ha la traiettoria E -relativamente compatta.

TEOREMA 7: Se $f(t)$ è L_0^2 -d.q.p. e $f'(t)$ è L_0^2 -limitata in J , la soluzione $\tilde{u}(\eta)$ E -limitata in J risulta $L_0^2(E)$ -d.q.p.

TEOREMA 8: Supponiamo che siano verificate le ipotesi del teorema 7 ed, in più, che $f(t)$ sia L_0^2 -q.p. Allora $\tilde{u}(\eta)$ è E -q.p.

TEOREMA 9: Se sono verificate le ipotesi dei teoremi 6 e 7, la funzione $\tilde{u}(\eta)$ risulta E -q.p.