
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

VITTORIA BORLA, ATTILIO FERRARI, GLEB WATAGHIN

L'equilibrio statistico ad elevate temperature e determinazione dei parametri di degenerazione

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 38 (1965), n.6, p. 771–774.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_6_771_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica. — *L'equilibrio statistico ad elevate temperature e determinazione dei parametri di degenerazione.* Nota di VITTORIA BORLA, ATTILIO FERRARI e GLEB WATAGHIN, presentata (*) dal Socio G. WATAGHIN.

Nella presente Nota si studia il problema dell'equilibrio statistico di particelle fondamentali che soddisfano alle disuguaglianze

$$m_e c^2 \ll kT^* < m_p c^2$$

ove m_e e m_p sono rispettivamente le masse di un elettrone e di un protone e T^* è il parametro della temperatura in presenza di un campo gravitazionale, V (7'). Per esempio l'insieme delle particelle si troverà in queste condizioni quando il parametro kT^* è $kT^* = m_\pi c^2$. I fondamenti teorici di uno stato di equilibrio di questo genere sono stati esposti in un lavoro precedente [1]. Verificheremo inoltre che nei casi considerati le concentrazioni di leptoni e di altre particelle che partecipano all'equilibrio statistico non sono troppo elevate di modo che si possa considerare valida l'approssimazione del modello delle particelle indipendenti. Si potrà tener conto della presenza di un eventuale campo gravitazionale con il metodo indicato nella [1]. Come è ben noto il problema si riduce alla ricerca del massimo della funzione

$$(1) \quad f(n_{ph,s} \dots) = \log W - \alpha' n - \beta E + \gamma' B - \delta'_e L_e - \delta'_\mu L_\mu = \max$$

dove $n_{ph,s}$, $n_{e^-,s}$, $n_{e^+,s}$, $\dots$ rappresentano rispettivamente le concentrazioni dei fotoni, degli elettroni, dei positroni ecc.

Queste variabili sono soggette ai seguenti cinque vincoli:

$$(2) \quad \sum_s (n_{ph,s} E_{ph,s} + n_{e^-,s} E_{e^-,s} + n_{e^+,s} E_{e^+,s} + n_{p^+,s} E_{p^+,s} + \dots) + \mathcal{E}_{\text{int.}} + \mathcal{E}_{\text{gr.}} = E$$

$$(3) \quad \sum_s [(n_{e^-,s} - n_{e^+,s}) - (n_{p^+,s} - n_{p^-,s}) + (n_{\pi^-,s} - n_{\pi^+,s}) + \dots] = -\frac{q}{e} = -n$$

$$(4) \quad \sum_s (n_{b,s} - n_{\bar{b},s}) = B$$

$$(5) \quad \sum_s (n_{e^+,s} - n_{e^-,s}) - \sum_s (n_{\nu_e,s} - n_{\bar{\nu}_e,s}) = L_e$$

$$(6) \quad \sum_s (n_{\mu^+,s} - n_{\mu^-,s}) - \sum_s (n_{\nu_\mu,s} - n_{\bar{\nu}_\mu,s}) = L_\mu.$$

(*) Nella seduta del 17 giugno 1965.

La determinazione del massimo condizionato (1) conduce a formule per bosoni, fermioni e loro antiparticelle del tipo seguente:

$$(7) \quad n_{f,\bar{f}} = A(T^*) g_f \int_{x_f}^{\infty} \frac{(x^2 - x_f^2)^{1/2} x dx}{\exp(x \mp \alpha) \pm 1} \quad A(T^*) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{kT^*}{\hbar c} \right)^3$$

$$(8) \quad n_{b,\bar{b}} = A(T^*) g_b \int_{x_b}^{\infty} \frac{(x^2 - x_b^2)^{1/2} x dx}{\exp(x \mp \sigma) - 1}$$

ove $x_f = \frac{m_f c^2}{kT^*}$, $x_b = \frac{m_b c^2}{kT^*}$, g_f e g_b sono i pesi statistici dipendenti dallo spin e dall'elicità, T^* è il parametro della temperatura in presenza di un campo gravitazionale (secondo P. Ehrenfest)

$$(7') \quad T^* = T \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

e dove il segno «meno» corrisponde alle particelle, il segno «più» alle antiparticelle. (Per bosoni si assume in questa Nota che le particelle sono: π^+ , ρ^+ , ecc.). I parametri statistici del tipo $\mp \alpha$, $\mp \sigma$, sono di segno contrario per particelle e antiparticelle in virtù della forma dei vincoli (3)-(6) in cui compaiono solo le differenze tra particelle ed antiparticelle.

È evidente che il numero di questi parametri è uguale al numero delle coppie di particelle in studio e che tali parametri sono funzioni dei quattro moltiplicatori di Lagrange α' , γ' , δ'_e , δ'_μ , e di $\beta^* = (kT^*)^{-1}$, che a loro volta sono fissati dai vincoli. L'esempio che ci proponiamo di studiare si riferisce all'equilibrio in cui assumiamo la presenza degli otto leptoni, dei mesoni π , ρ , k e di un numero prefissato di protoni. Alla temperatura scelta $T^* = \frac{m_\pi c^2}{k} = 1,62 \cdot 10^{12} \text{ } ^\circ\text{K}$, possiamo trascurare la creazione di coppie di antiprotoni e di antibarioni in genere. La concentrazione prefissata di protoni potrà variare entro larghi limiti; saranno esaminati i due casi: $n_p = 10^{36}$ per cm^3 e $n_p = 10^{24}$ per cm^3 , con il numero di neutroni $n_n \cong n_p$.

Le relazioni fra parametri statistici e moltiplicatori di Lagrange sono le seguenti:

$$(9) \quad \alpha = \alpha' + \delta'_e \quad ; \quad \sigma = -\alpha' \quad ; \quad \gamma = \gamma' - \alpha' \quad ; \quad \eta = \alpha' + \delta'_\mu \quad ; \quad \text{ecc.}$$

Utilizzando per le differenze $(n_f - n_{\bar{f}}) A^{-1}(T^*) g_f^{-1}$ le formule

$$(10) \quad \int_{x_{f,b}}^{\infty} \frac{(x^2 - x_{f,b}^2)^{1/2} x dx}{\exp(-\alpha + x) \pm 1} - \int_{x_{f,b}}^{\infty} \frac{(x^2 - x_{f,b}^2)^{1/2} x dx}{\exp(+\alpha + x) \pm 1} = \text{Sh } \alpha \int_{x_{f,b}}^{\infty} \frac{(x^2 - x_{f,b}^2)^{1/2} x dx}{\text{Ch } x \pm \text{Ch } \alpha}$$

studiate nel caso elettrodinamico [2], e sostituendo nei vincoli le soluzioni

trovate, si ottengono le quattro equazioni seguenti:

$$(11) \quad n_p + n_n = 2 \cdot 10^{36} \quad (\text{ovv. } n_p + n_n = 2 \cdot 10^{24})$$

$$(12) \quad -\frac{n_p}{A(T^*)} + g_e \text{Sh}(\alpha' + \delta'_e) \int_{x_e}^{\infty} \frac{(x^2 - x_e^2)^{1/2} x dx}{\text{Ch } x + \text{Ch}(\alpha' + \delta'_e)} + \\ + g_\mu \text{Sh}(\alpha' + \delta'_\mu) \int_{x_\mu}^{\infty} \frac{(x^2 - x_\mu^2)^{1/2} x dx}{\text{Ch } x + \text{Ch}(\alpha' + \delta'_\mu)} + g_\pi \text{Sh } \alpha' \int_{x_\pi}^{\infty} \frac{(x^2 - x_\pi^2)^{1/2} x dx}{\text{Ch } x - \text{Ch } \alpha'} + \\ + g_k \text{Sh } \alpha' \int_{x_k}^{\infty} \frac{(x^2 - x_k^2)^{1/2} x dx}{\text{Ch } x - \text{Ch } \alpha'} + g_q \text{Sh } \alpha' \int_{x_q}^{\infty} \frac{(x^2 - x_q^2)^{1/2} x dx}{\text{Ch } x - \text{Ch } \alpha'} = 0$$

$$(13) \quad g_e \text{Sh}(\alpha' + \delta'_e) \int_{x_e}^{\infty} \frac{(x^2 - x_e^2)^{1/2} x dx}{\text{Ch } x + \text{Ch}(\alpha' + \delta'_e)} - g_v \text{Sh } \delta'_e \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\text{Ch } x + \text{Ch } \delta'_e} = \frac{n_p}{A(T^*)}$$

$$(14) \quad g_\mu \text{Sh}(\alpha' + \delta'_\mu) \int_{x_\mu}^{\infty} \frac{(x^2 - x_\mu^2)^{1/2} x dx}{\text{Ch } x + \text{Ch}(\alpha' + \delta'_\mu)} - g_v \text{Sh } \delta'_\mu \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\text{Ch } x + \text{Ch } \delta'_\mu} = 0.$$

L'equazione (6) che lega δ'_μ con α' fissa il rapporto di questi parametri. Per risolvere il sistema formato dalle (4) (5) e (6) si tiene conto che nell'esempio considerato i valori dei parametri statistici risultanti dal problema sono piccoli, per cui si può porre:

$$(15) \quad \text{Ch } \alpha \approx 1 \quad ; \quad \text{Sh } \alpha \approx \alpha \quad ; \quad \text{Ch } \sigma \approx 1 \quad ; \quad \text{Sh } \sigma \approx \sigma \quad ; \quad \text{Ch } \eta \approx 1 \quad ; \quad \text{Sh } \eta \approx \eta.$$

Il sistema di equazioni si riduce ora a semplici equazioni lineari che danno nel caso $n_p = 10^{36}$ protoni per cm^3 i valori seguenti dei parametri di degenerazione:

$$(16) \quad \alpha = 2,04 \cdot 10^{-2} \quad ; \quad \sigma = 3,51 \cdot 10^{-3} \quad ; \quad \eta = -9,98 \cdot 10^{-3}$$

e nel caso $n_p = 10^{24}$ protoni per cm^3

$$(17) \quad \alpha = 2,04 \cdot 10^{-14} \quad ; \quad \sigma = 3,51 \cdot 10^{-15} \quad ; \quad \eta = -9,98 \cdot 10^{-15}.$$

I valori di γ' e di γ sono prefissati dalle concentrazioni di n_p e n_n e dalla temperatura: $\gamma' = 6,72$, $\gamma = 6,75$. I piccoli valori del moltiplicatore α' sono in accordo con la ipotesi sopra introdotta di $n_n \cong n_p$.

Si nota che pur essendo il numero delle coppie assai maggiore della differenza fra particelle ed antiparticelle si osservano caratteristici cambiamenti

di segno:

$$(18) \quad n_e - n_{e^+} > 0 \quad ; \quad n_{\mu^-} - n_{\mu^+} < 0 \quad ; \quad \text{ecc.}$$

In modo simile si possono risolvere i problemi con maggior numero di tipi di particelle (bosoni e fermioni di massa inferiore a m_p).

Ringraziamo la dott. M. T. Reineri per alcuni calcoli numerici.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. WATAGHIN, « Nuovo Cimento », XXXVI [1] 300 (1965); « Suppl. Nuovo Cimento », 6, 241 (1949).
- [2] G. WATAGHIN, « Phys. Rev. », 66, [5] 149 (1944).