Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

G. Krall

Sul problema centrale della dinamica dei ponti. - Nota II. Il teorema del Coriolis e le velocità critiche di veicoli terra aria

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.6, p. 760–770.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_6_760_0>

Meccanica. — *Sul problema centrale della dinamica dei ponti.* – Nota II. *Il teorema del Coriolis e le velocità critiche di veicoli terra aria.* Nota (*) del Socio G. KRALL.

Qui si riprende il problema, considerato nella Nota I [1] dei carichi pesanti ed inerti mobili sopra un ponte, su di un binario. Là è stata data qualche formola concisa per le *velocità critiche* in regimi stazionari, di flussi indefiniti di materia: fluidi liquidi o gas, sopra un ponte, un binario, entro ad un tubo indefinito corrente su un letto o in un mezzo elastico. Ora, accanto a varie precisazioni analitiche e meccaniche utili per lo studio non solo delle soluzioni strettamente stazionarie ma anche di quelle vibratorie del problema, si vuole far vedere che l'equazione del moto elastico trasversale $w = w(x, t)$ di un involucro cilindrico C (di asse x) in cui si ha un flusso μV di materia, di gas ad esempio (con che, se ρ è la densità, A l'area della sezione, è $\mu = \rho A$), è quella [2] del moto elastico trasversale dello stesso involucro C lambito però solo esternamente da una corrente di densità ρ, velocità supersonica V.

Il che significa che le reazioni di inerzia calcolate per $w(x, t)$ di C con il teorema del Coriolis per un flusso ρAV, interno, sono le reazioni gasdinamiche per $w(x, t)$ di una corrente supersonica *esterna* ρV.

Si ha, s'intende, da considerare lo sforzo assiale N per un involucro di lunghezza finita L, conseguente alla resistenza di ogiva, in regime di moto uniforme *costante* sino al reattore; in regime di accelerazione o decelerazione assiale, eguale alla spinta del reattore meno le reazioni di inerzia, brevemente, eguale alla *spinta perduta*.

L'equazione in parola ha anche un qualche interesse analitico; qui ci limiteremo però solo alla ricerca di soluzioni particolari statiche o vibratorie armoniche applicando per queste i metodi diretti del calcolo delle variazioni (*serie minimizzanti*) al corrispondente principio dell'Hamilton senza eliminare prima, come usualmente in meccanica delle vibrazioni, la variabile tempo. Questa vien qui trattata alla stregua di una coordinata spaziale fissandone l'intervallo di variabilità in base al periodo di vibrazione a priori incognito, ma di cui la realtà vien accertata attraverso il riconoscimento in generale che gli esponenti caratteristici sono tutti immaginari puri, salvo al più uno, egual zero, cui corrisponde la velocità critica statica del veicolo. Riconoscimento che, naturalmente, riesce nel senso accennato solo e soltanto quando agli estremi siano soddisfatte le *condizioni naturali* che scaturiscono dal principio variazionale hamiltoniano classico, cioè limitato a soli aspetti *conservativi* del problema.

Gli esponenti caratteristici non sono più immaginari puri, ma complessi con tutti i pericoli che comporta una parte reale positiva per valori di V anche

(*) Presentata nella seduta del 14 novembre 1964.

inferiori alla V_{cr} statica, quando agli estremi le *condizioni naturali* siano modificate artatamente. Ciò avviene ad esempio attraverso servointerventi (necessari ad esempio per la stabilità globale) o quando, con o senza modifiche delle condizioni agli estremi, agiscano lungo l'involucro ulteriori forze aerodinamiche non conservative, quali ad esempio sono quelle conseguenti a piani di coda, alettoni, a variazioni (con x) del raggio R dell'involucro cilindrico che si considera per le quali si provocano in fase vibratoria reazioni aerodinamiche.

Estendendo successivamente questo studio all'ambito di correnti bidimensionali di carichi inerti sopra lastre elastiche, si arriva a reazioni per effetto Coriolis equivalenti, in regimi stazionari, a stati di sforzi piani nelle lastre stesse. Allora si entra in questioni di stabilità legata agli autovalori corrispondenti ai moltiplicatori critici degli sforzi stessi che, per quanto note, presentano ancora aspetti riposti e non pochi recessi d'ombra. Se le correnti sono fluide appaiono difficoltà che sarà utile considerare in una Nota a se.

2. PRINCIPIO DELL'HAMILTON PER IL PROBLEMA DI CUI SI TRATTA. – Si consideri dunque un tubo circolare cilindrico assimilabile ad un'asta elastica di flessorigidezza costante B, di momento di inerzia delle masse diffuse sulla sezione trasversale generica (interessante il tratto $\Delta x = 1$) $\mu_0 j^2$, μ_0 essendo quindi la massa del tubo per unità di lunghezza, j^2 il quadrato del raggio giratore di inerzia della sezione rispetto al suo asse neutro che, brevemente, indipendentemente da sforzi assiali, si identificherà con il suo asse centrale di inerzia, trasversale ad x, coordinata assiale. Nel tubo fluisce, con velocità costante V, una massa μ per unità di lunghezza, si ha cioè un flusso μV. Per le vibrazioni trasversali $w = w(x, t)$ dell'asta si vuol scrivere un principio hamiltoniano. Posto

$$\frac{\partial}{\partial x} = (\ )' \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} = (\dot{\ })$$

si ha per l'energia elastica P, se L è la lunghezza del tubo,

$$\text{(1)} \qquad P = \frac{1}{2}\int_0^L B w''^2 \, dx .$$

Se il tubo è solidale con un mezzo elastico che reagisce bilateralmente con forza $-kw$, per unità di lunghezza, allo spostamento w dell'asse tubo, a P va aggiunto un termine

$$\text{(1 a)} \qquad P_1 = \frac{1}{2}\int_0^L k w^2 \, dx .$$

Per l'energia cinetica T_1 del tubo, T_2 del fluido che si suppone partecipi rigidamente al moto oscillatorio, si ha

$$\text{(2)} \qquad T_1 = \frac{1}{2}\int_0^L (\mu_0 \dot{w}^2 + \mu_0 j^2 \dot{w}'^2) \, dx \quad , \quad T_2 = \frac{1}{2}\int_0^L \mu (V w' + \dot{w})^2 \, dx ,$$

Se agisce uno sforzo assiale N, di natura qualunque, a P va aggiunto infine un termine $\mathfrak{L}_2^*$, lavoro di 2° ordine delle forze interne,

$$\mathfrak{L}_2^* = -\frac{1}{2}\int_0^L N w'^2 \, dx \,, \tag{3}$$

N potendo essere funzione di x.

Il principio dell'Hamilton si scrive in definitiva

$$\delta \int_0^t (T_1 + T_2 - P - P_1 - \mathfrak{L}_2^*) \, dt = 0 \,, \tag{4}$$

ovvero, esplicitamente,

$$\delta \int_0^t dt \int_0^L \{ \mu_0 \dot{w}^2 + \mu_0 j^2 \dot{w}'^2 + \mu (Vw' + \dot{w})^2 - Bw''^2 - kw^2 + Nw'^2 \} \, dx = 0, \tag{4 a}$$

la variazione intendendosi presa, con le solite specificazioni, con riguardo a w funzione di x e t.

Con ovvie integrazioni p.p. si ha l'equazione, che si conferma con scrittura diretta,

$$(Bw'')'' + (Nw')' + kw - \mu_0 j^2 \ddot{w}'' + \mu (V^2 w'' + 2V\dot{w}' + \ddot{w}) + \mu_0 \ddot{w} = 0 \,, \tag{5}$$

con le condizioni agli estremi, anch'esse direttamente confermabili,

$$[(Bw'')' + (N + \mu V^2) w' - \mu_0 j^2 \ddot{w}' + \mu V \dot{w}] \, \delta w - (Bw'') \, \delta w' = 0 \quad \text{in} \quad x = 0 \,, L \,. \tag{6}$$

Se l'asta–tubo è fissa agli estremi, a snodo o ad incastro, le (6) sono senz'altro soddisfatte in quanto si ha,

(6 *a*) per lo *snodo*: $w(0) = w(L) = 0 \quad ; \quad w''(0) = w''(L) = 0 \,;$

(6 *b*) per l'*incastro*: $w(0) = w(L) = 0 \quad ; \quad w'(0) = w'(L) = 0 \,.$

Invece, per l'incastro in $x = 0$ (ad esempio) e l'*estremo libero* in $x = L$ si ha, considerando le parentesi [ ] a fattori di δw e ( ) a fattore di $\delta w'$ della (6),

$$w(o) = 0 \quad , \quad w'(0) = 0 \quad , \quad [\ ]_{x=L} = 0 \quad , \quad (\ )_{x=L} = 0 \,, \tag{6 c}$$

Per tutti e due gli estremi liberi *dovrebbero* annullarsi le [ ] e ( ) della (6) in $x = 0, L$. Ma va allora osservato che, *per* $k = 0$ (assenza di reattività del suolo), come vedremo nel caso importante della asta–tubo–missile volante ad esempio, si ha *instabilità globale rigida* per $N \neq 0, V \neq 0$ a meno di non introdurre termini correttivi agli estremi stessi, conseguenti ad esempio a servointerventi, tali da assicurare entro limiti adeguati la stabilità. Ma questi interventi modificano profondamente la problematica di cui ci si occupa.

Si rilevi ancora che è dubbio se nella [ ] a fattore di δw possa praticamente conservarsi il termine $\mu V^2 w'$ e $\mu V\dot{w}$ (in merito cfr. *Osservazione 2ª*).

Riandando alla (5), che è sostanzialmente la (1 *c*) della Nota I, osserviamo che questa si ritrova tale e quale quando si scrive l'equazione del moto elastico trasversale di un tubo–missile soggetto all'azione aerodinamica supersonica della corrente esterna calcolata con la teoria di Miles da Kaprzynski e Kaliski [2]. Basta porre nelle (5), $\mu = \rho A$, essendo ρ la densità dell'aria, A l'area $A = R^2 \pi$ della sezione retta del tubo (di raggio R). La teoria del Miles non dà però le condizioni agli estremi, onde in [2] per $N = 0$, si assumono le condizioni tipiche dell'asta libera agli estremi, nel caso specifico le condizioni, *non naturali*, per $V \neq 0$,

$$(Bw'')'\Big|_{x=0,L} = 0 \quad , \quad Bw''\Big|_{x=0,L} = 0 . \tag{7}$$

Non si hanno quindi esponenti caratteristici tutti immaginari puri e le velocità critiche sono legate al segno (> 0) della parte reale degli stessi. Tali velocità, anzi la velocità V_{cr} (giacché interessa l'inferiore tra tutte) possono risultare inferiori a quella V_{cr} statica, corrispondente all'esponente nullo del caso conservativo secondo le (5) e (6).

Riandando al nostro problema, per le condizioni (6 *a*) che possono anche tradurre il caso degli estremi liberi se, in regime stazionario, ($\partial w/\partial t = 0$) lo sforzo assiale $N + \mu V^2$ si pensa orientato sulla congiungente gli estremi, si ha la velocità critica da

$$(N + \mu V^2) = \pi^2 \frac{B}{L^2} \cdot \tag{8}$$

Infatti, ponendo nella (5) w indipendente da t, questa si riduce, per $k = 0$, a

$$(Bw'')'' + (Nw')' + \mu V^2 w'' = 0$$

e da qui, per $B = \text{cost.}$, $N = \text{cost.}$, con

$$w = \sin \frac{\pi}{L} x$$

si ha la condizione critica in regime stazionario data dalla (8). Se N deriva dalla resistenza di ogiva, se A è l'area della sezione retta, C_r comprensivo del coefficiente di forma, si ha, per ρ densità del gas, $\mu = \rho A$,

$$N = \frac{1}{2} C_r \rho V^2 A = \frac{1}{2} C_r \mu V^2 .$$

Segue da (8)

$$V_{cr}^2 = \frac{\pi^2}{\mu\left(1 + \dfrac{C_r}{2}\right)} \frac{B}{L^2} . \tag{9}$$

Poiché C_r è piccolo di fronte all'unità, l'influenza della resistenza non è rilevante. In fase di accelerazione però, lo sforzo assiale può esser notevole conseguentemente alla reazione di inerzia, ma allora ben poco si sa dell'azione gasdinamica.

A titolo di esempio, si consideri un involucro per cui $R = 0{,}375$ m, $A = R^2\pi = 0{,}4418$ m^2.

Posto

$$\rho_0 = 0{,}125 \text{ Kg m}^{-3}/g \quad , \quad \mu = \rho_0 A = 0{,}0552 \text{ Kg m}^{-1}/g \,,$$
$$B = EJ = 3{,}0 \cdot 10^6 \text{ Kg m}^2 \quad , \quad L = 12{,}00 \text{ m} \quad , \quad N_0 = 0$$

si ha dalla (9), per $C_r = 0$,

$$V_{cr}^2 = \pi^2 \frac{B}{\mu L^2} = \pi^2 \frac{3{,}0 \cdot 10^6}{0{,}0552 \cdot 12{,}00^2} = 3{,}725 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-2}$$

e quindi

$$V_{cr} \cong 1930 \text{ m sec}^{-1}.$$

Esponenti caratteristici. – Si tratta di far vedere che la velocità critica in regime stazionario ($\partial w/\partial t = 0$) esaurisce la ricerca della stabilità in quanto in regime dinamico non si hanno velocità critiche ($<$ della statica, o merostatica, come la si vuol chiamare) poiché i moti vibratori per $V < V_{cr}$ sono sempre stabili nel senso che, posta la soluzione nella forma

$$w(x\,,t) = u(x) \cdot e^{zt} \tag{10}$$

gli esponenti caratteristici sono, per $V < V_{cr}$, immaginari puri (ed uno è nullo per $V = V_{cr}$ secondo la (8)).

Per dimostrare ciò, indipendentemente dalla più speditiva *Osservazione* che segue, basta ammettere per z la forma complessa e corrispondente coniugata $\bar{z}$,

$$z = z_1 + iz_2 \quad , \quad \bar{z} = z_1 - iz_2 . \tag{11}$$

Dovendosi avere allora le soluzioni

$$u = u_1 + iu_2 \quad , \quad \bar{u} = u_1 - iu_2 \,, \tag{11 a}$$

tutto si riduce a provare che deve essere $z_1 = 0$.

Posta nella (5) la (10), con riguardo alle (11), (11 *a*), separando la parte reale da quella immaginaria, risultano due equazioni associate in u_1, u_2 contenenti z_1 e z_2 con le quali si dimostra, come di consueto in quest'ordine di questioni, che deve essere $z_1 = 0$,

Precisamente, fatte le posizioni

$$N_0 + \mu V^2 = \tilde{N} \quad , \quad \mu_0 j^2 = \tilde{\gamma} \quad , \quad 2\mu V = 2\tilde{q} \qquad \mu_0 + \mu = \mu^* \tag{12}$$

si ha dalla (5), attese le (11), (11 *a*),

$$(5)' \qquad B u_1^{(\text{IV})} + k u_1 + \tilde{N} u_1'' - \tilde{\gamma} u_1'' z_1^2 + \mu^* u_1 z_1^2 + 2\tilde{\gamma} u_2'' z_1 z_2 - 2\mu^* u_2 z_1 z_2 + \\ + \tilde{\gamma} u_1'' z_2^2 - \mu^* u_1 z_2^2 + 2\tilde{q}(z_1 u_1' - z_2 u_2') = 0 .$$

$$(5)'' \qquad B u_2^{(\text{IV})} + k u_2 + \tilde{N} u_2'' - \gamma u_2'' z_1^2 + \mu^* u_2 z_1^2 - 2\tilde{\gamma} u_1'' z_1 z_2 + 2\mu^* u_1 z_1 z_2 + \\ + \tilde{\gamma} u_2'' z_2^2 - \mu^* u_2 z_2^2 + 2\tilde{q}(z_1 u_2' + z_2 u_1') = 0 ,$$

Da qui, moltiplicando la prima equazione per u_2 la seconda per u_1, integrando, una o due volte p.p. i termini con u'' rispettivamente $u^{(\mathrm{IV})}$, tenendo presenti le condizioni (6) agli estremi, $u = 0$, $u'' = 0$ o $u = 0$, $u' = 0$,

$$(5)''' \qquad -\int_0^L 2\,\tilde{\gamma}\, z_1 z_2 (u_1'^2 + u_2'^2)\, dx - 2\cdot\int_0^L \tilde{q}\, z_2 (u_1' u_1 + u_2' u_2)\, dx + \\ -2\int_0^L \mu^* \cdot z_1 z_2 (u_1^2 + u_2^2)\, dx + 2\int_0^L \tilde{q} z_1 (u_1' u_2 - u_2' u_1)\, dx = 0\,.$$

Da qui, poiché si annulla il 2º termine della $(5)'''$ si ha $z_1 = 0$ oppure

$$(13) \qquad z_2 = \frac{\int_0^L \tilde{q}\,(u_1' u_2 - u_2' u_1)\, dx}{\int_0^L \tilde{\gamma}\,(u_1'^2 + u_2'^2)\, dx + \int_0^L \mu^*\,(u_1^2 + u_2^2)\, dx}$$

Questa determinazione di z_2 è però impossibile. Infatti, moltiplicando la $(5)'$ per $u_1\, dx$, la $(5)''$ per $u_2\, dx$, sommando ed integrando p.p. quanto occorre, si trae, posto $|u|^2 = u_1^2 + u_2^2$, $|u'|^2 = u_1'^2 + u_2'^2$, $|u''|^2 = u_1''^2 + u_2''^2$;

$$(13\,a) \qquad \int_0^L \mathrm{B}\,|u''|^2 dx + \int_0^L k\,|u|^2 dx - \int_0^L \tilde{\mathrm{N}}\,|u'|^2 dx + \int_0^L \tilde{\gamma}\, z_1^2\,|u'|^2 dx + \\ + \int_0^L \mu^* z_1^2\,|u|^2 dx - \int_0^L \tilde{\gamma} z_2^2\,|u'|^2 dx - \int_0^L \mu^* z_2^2\,|u|^2 dx + \\ + 2\int_0^L \tilde{q} z_2\,(u_2' u_1 - u_2' u_1)\, dx = 0\,.$$

I tre ultimi termini di questa eguaglianza, per la determinazione (13) di z_2, si riducono al termine positivo

$$\frac{\left[\int_0^L \tilde{q}\,(u_1' u_2 - u_2' u_1)\, dx\right]^2}{\int_0^L \tilde{\gamma}\,|u'|^2 dx + \int_0^L \mu^*\,|u|^2 dx}$$

I primi tre termini della (13 a), per

$$(8)^* \qquad \tilde{\mathrm{N}} < \tilde{\mathrm{N}}_{cr} = \min. \frac{\int_0^L \mathrm{B}\,|u''|^2 dx + \int_0^L k\,|u|^2 dx}{\int_0^L |u'|^2 dx}$$

poiché N_{cr} ha un valore positivo non nullo sono anche una quantità positiva. Pertanto la (13 *a*) dimostra impossibile la determinazione (13) di z_2. Deve essere quindi $z_1 = 0$ e z_2 risulta non nulla.

Infatti posto nelle (5)', (5)'' $z_1 = 0$, moltiplicando la 1ª per $u_1\,dx$, la 2ª per $u_2\,dx$, sommando ed integrando p.p., si trae

$$(13\,b)\qquad \int_0^L B\,|u''|^2\,ds + \int_0^L k\,|u|^2\,dx - \tilde{\tilde{N}}\int_0^L |u'|^2\,dx - z_2^2\left\{\int_0^L \tilde{\tilde{\gamma}}\,|u'|^2\,dx + \int_0^L \mu^*\,|u|^2\,dx\right\} + 2\,qz_2\cdot\int_0^L (u_2\,u_1' - u_1\,u_2')\,dx = 0\,.$$

Da qui si vede che z_2 è reale, e diverso da zero, per $\tilde{\tilde{N}} < N_{cr}$. Per $\tilde{\tilde{N}} = N_{cr}$ si ha la radice $z_2 = 0$ cui corrisponde la già considerata instabilità statica.

Per le altre condizioni limiti comprese nella (6) si confronti l'*osservazione 2ª*.

Osservazione 1ª. – Ciò risulta anche dall'esistenza di un integrale primo dell'energia conseguente alla circostanza che la *complementare* non da contributo al lavoro perché risulta senz'altro *wattlos* nell'intervallo $0 \leq x \leq L$ per $w(0) = w(L) = 0$ o perché il lavoro si compensa in caso diverso.

Infatti moltiplicando la (5) per $\dot{w}\,dx$ ed integrando con adeguate integrazioni p. p. fra 0 ed L, risulta, ove si ponga

$$2\,\mathcal{S} = \int_0^L \{Bw''^2 + kw^2 - (N + \mu V^2)\,w'^2\}\,dx\,,$$

$$2\,\mathcal{T} = \int_0^L \{(\mu + \mu_0)\,\dot{w}^2 + \mu_0\,j^2\,\dot{w}'^2\}\,dx\,,$$

poiché per la (6 *a*) o (6 *b*),

$$2\int_0^L \mu V\,\dot{w}'\,\dot{w}\,dx = \mu V\,\dot{w}^2\Big|_0^L$$

$$(*)\qquad \frac{d}{dt}(\mathcal{S} + \mathcal{T}) = 0$$

con le (6) in cui δw è sostituito con $\dot{w}$, rispettivamente $\delta w'$ con $\dot{w}'$.

Dalla (*) segue l'integrale annunciato

$$\mathcal{S} + \mathcal{T} = \text{cost.}$$

Se $\mathcal{S} > 0$, ed ha un minimo in $w = 0$, il che avviene certamente se $\tilde{N} < \tilde{N}_{cr}$ dato dalla (8)*, essendo $\mathcal{T} > 0$ in ogni caso, segue ragionando alla Dirichlet, che il moto è stabile e quindi secondo i teoremi di Liapunof e Levi-Civita, che gli esponenti caratteristici sono immaginari puri. La circostanza in cui sia $\mathcal{S}=0$ per $\tilde{N} = \tilde{N}_{cr}$ porta all'esponente nullo e quindi all'instabilità.

Osservazione 2ª. – Naturalmente si trovano per le due vie considerate gli stessi risultati per le altre possibili condizioni limiti comprese nella (6), le (6 *c*) ad esempio. Ma va ripetuta l'osservazione già fatta circa la possibilità di mantenere nella [ ] a fattore di δw, per questioni direzionali del flusso μV, il termine $\mu V^2 w'$ e $\mu V \dot{w}$. Abbandonandole, le condizioni limiti non sono più naturali, cioè quelle che derivano dal principio variazionale, con tutte le ovvie conseguenze sul carattere aritmetico degli esponenti caratteristici.

Calcolo delle frequenze. – Atteso il carattere armonico delle soluzioni, il principio dell'Hamilton si presta per l'applicazione del metodo diretto del calcolo delle variazioni secondo Ritz, considerando il dominio di integrazione $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t \leq T$, $2T$ essendo l'apriori incognito periodo fondamentale.

Per una scrittura concisa degli sviluppi algoritmici conviene ridurre il principio e quindi l'euleriana corrispondente a forma adimensionale.

Poniamo con questo intento

$$(14)\quad \begin{cases} \xi = x : L \quad , \quad \tau = t : T \quad , \quad v = wL \, , \\ \tilde{\nu} = \dfrac{NL^2}{B} \quad , \quad \lambda = \dfrac{L}{VT} \quad , \quad \tilde{\mu} = \dfrac{\mu V^2 L^2}{B} \quad , \quad \beta = \dfrac{\mu_0}{\mu} \quad , \quad \tilde{k} = k \dfrac{L^4}{B} \, , \\ \tilde{\mu}_0 = \beta \tilde{\mu} \quad , \quad \tilde{j} = \tilde{\mu}_0 \left(\dfrac{j}{L}\right)^2 = \mu_0 j^2 \dfrac{V^2}{B} \quad , \quad \dfrac{d}{d\xi} = (\;)' \quad , \quad \dfrac{d}{d\tau} = (\dot{\;}) . \end{cases}$$

Il principio (4 *a*) diviene, limitando l'integrazione rispetto a t, all'intervallo $0 - T$,

$$(4\,a)' \qquad \delta \int_0^1 d\xi \int_0^1 \{ v''^2 - \tilde{\nu} v'^2 - \beta \tilde{\mu} \lambda^2 \dot{v}^2 - \tilde{\mu} (v' + \lambda \dot{v})^2 - \tilde{j} \lambda^2 \dot{v}'^2 + \tilde{k} v^2 \} \, d\tau = 0$$

e da qui si ha

$$(5) \qquad v^{(IV)} + \tilde{\nu} v'' + \beta \tilde{\mu} \lambda^2 \ddot{v} - \tilde{j} \lambda^2 \ddot{v}'' + \tilde{\mu} (v'' + 2 \lambda \dot{v}' + \lambda^2 \ddot{v}) \tilde{k} v = 0$$

con le condizioni agli estremi

$$(6) \qquad [v''' + (\tilde{\nu} + \tilde{\mu}) v' - \tilde{j} \lambda^2 \ddot{v}' + \tilde{\mu} \lambda \dot{v}] \, \delta v \Big|_0^1 + v'' \, \delta v' \Big|_0^1 = 0 .$$

Ciò posto, con riguardo alle condizioni $w = 0$, $w'' = 0$ in $x = 0, L$, cioè $v = 0$, $v'' = 0$ in $\xi = 0, 1$, accertata ormai l'esistenza di soluzioni armoniche libere, in (4 *a*)$'$, scritta concisamente

$$(4\,a)'' \qquad \delta \Phi = 0 \, ,$$

poniamo

$$(15) \qquad v(\xi, \tau) = \sum_{1}^{\infty}{}_{mn} \, a_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\tau .$$

Ricordando che

$$\int_0^1 \sin m\pi\xi \cos p\pi\xi \, d\xi = \begin{cases} 0 & \text{per } m \pm p \text{ pari,} \\ \dfrac{2}{\pi} \dfrac{m}{m^2 - p^2} & \text{per } m \pm p \text{ dispari,} \end{cases}$$

si ha la forma quadratica nei coefficienti a_{mn},

$$(16) \qquad \Phi(a_{mn}, a_{pq}) = \frac{\pi^2}{4} \sum_{mn} [\;]_{mn} a_{mn}^2 + 8 \tilde{\mu}\lambda \sum_{mn\,pq}' \frac{mn\,pq}{(m^2 - p^2)(n^2 - q^2)} a_{mn} a_{pq}$$

l′′ significando l'esclusione dei termini per cui $m \pm p$ o $n \pm q$ è pari ed essendosi concisamente posto

$$(17) \qquad [\;]_{mn} = m^4 \pi^2 - m^2 (\tilde{\nu} + \tilde{\mu}) + \tilde{k}/\pi^2 - \tilde{\mu} n^2 \left[1 + \beta \left(1 + m^2 \pi^2 \cdot \frac{j^2}{L^2}\right)\right] \lambda^2 .$$

Si ha così da $(4\,a)''$ il sistema di equazioni

$$(18) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial a_{mn}} = 0$$

ovvero, esplicitando,

$$(18)' \qquad [\;]_{mn} a_{mn} + \frac{32}{\pi^2} \tilde{\mu}\lambda \Sigma_{pq}' \frac{mn\,pq}{(m^2 - p^2)(n^2 - q^2)} a_{pq} = 0 .$$

Fatta la posizione

$$(19) \qquad \varkappa = \frac{\pi^2}{32 \tilde{\mu}\lambda} ,$$

questo sistema porge con riguardo ai primi 12 coefficienti a_{mn} due sistemi indipendenti di equazioni, il primo per $m + n$ dispari, il secondo per $m + n$ pari. Precisamente:

$(m + n)$ dispari,

(18 *a*)

$mn \backslash pq$	a_{12}	a_{21}	a_{23}	a_{32}	a_{14}	a_{41}
a_{12}	$\varkappa [\;]_{12}$	$-\frac{4}{9}$	$\frac{12}{15}$	0	0	$-\frac{8}{45}$
a_{21}	$-\frac{4}{9}$	$\varkappa [\;]_{21}$	0	$\frac{12}{15}$	$-\frac{8}{45}$	0
a_{23}	$\frac{12}{15}$	0	$\varkappa [\;]_{23}$	$-\frac{36}{25}$	$-\frac{24}{21}$	0
a_{32}	0	$\frac{12}{15}$	$-\frac{36}{25}$	$\varkappa [\;]_{32}$	0	$-\frac{24}{21}$
a_{14}	0	$-\frac{8}{45}$	$-\frac{24}{21}$	0	$\varkappa [\;]_{14}$	$-\frac{16}{225}$
a_{41}	$-\frac{8}{45}$	0	0	$-\frac{24}{21}$	$-\frac{16}{225}$	$\varkappa [\;]_{41}$

$(m+n)$ *pari*,

(18 *b*)

$\frac{pq}{mn}$	a_{11}	a_{22}	a_{13}	a_{31}	a_{33}	a_{42}	a_{24}
a_{11}	$\varkappa\,[\;]_{11}$	$\frac{4}{9}$	0	0	0	$\frac{8}{45}$	$\frac{8}{45}$
a_{22}	$\frac{4}{9}$	$\varkappa\,[\;]_{22}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{36}{25}$	0	0
a_{13}	0	$-\frac{4}{5}$	$\varkappa\,[\;]_{13}$	0	0	$-\frac{24}{75}$	$\frac{24}{21}$
a_{31}	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\varkappa\,[\;]_{31}$	0	$\frac{24}{21}$	$-\frac{24}{75}$
a_{33}	0	$\frac{36}{25}$	0	0	$\varkappa\,[\;]_{33}$	$-\frac{72}{35}$	$-\frac{72}{35}$
a_{42}	$\frac{8}{45}$	0	$-\frac{24}{75}$	$\frac{24}{21}$	$-\frac{72}{35}$	$\varkappa\,[\;]_{42}$	0
a_{24}	$\frac{8}{45}$	0	$\frac{24}{21}$	$-\frac{24}{75}$	$-\frac{72}{35}$	0	$\varkappa\,[\;]_{24}$

Dalle (18, *a*, *b*), tenendo presenti le (17) e (19), si hanno i λ_ϱ come radici della equazione (in $\varkappa$) che si ottiene eguagliandone a zero il discriminante sopra scritto per ognuna. Dai λ_ϱ si calcolano i periodi T^*_ϱ e le frequenze σ_ϱ con le relazioni

$$T^*_\varrho = 2\,T_\varrho = \frac{2\,L}{V\cdot\lambda_\varrho} \quad , \quad \sigma_\varrho = \frac{2\,\pi}{T^*_\varrho} = \frac{V\lambda_\varrho}{L}\,\pi\,. \tag{20}$$

Merita rilevare che, limitandosi ai termini sulla diagonale della matrice (18 *a*) o (18 *b*) si hanno i $\tilde{\lambda}_\varrho$ a meno dell'accelerazione complementare

$$\tilde{\lambda}^2_\varrho = \lambda^2_{mn} = \frac{\pi^2 m^4 - m^2(\tilde{\nu} + \tilde{\mu}) + \tilde{k}/\pi^2}{\tilde{\mu} n^2 \left[1 + \beta\left(1 + m^2\,\pi^2\,\dfrac{j^2}{L^2}\right)\right]}\,. \tag{21}$$

Limitandosi ai due primi termini si rileva un abbassamento di $\tilde{\lambda}^2_{11}$ ed un innalzamento di λ^2_{22}.

Posto $\sigma_{mn} = 2\,\pi/T_{mn}$ per la frequenza $(mn)^{\text{ima}}$ (*complementare* a parte) si ha, esplicitando i termini $\tilde{\mu}$, $\tilde{\nu}$, β, $\tilde{k}$

$$\sigma_{mn} = \frac{2\,\pi}{T_{mn}} = \frac{m^2\,\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{B}{\mu}}\cdot\sqrt{\frac{1 - \dfrac{N}{N^{(m)*}_{cr}}}{1 + \dfrac{\mu_0}{\mu}\left[1 + m^2\,\pi^2\left(\dfrac{j}{L}\right)^2\right] n^2}} \tag{22}$$

con

$$N = N_0 + \mu V^2 \quad , \quad N_{cr}^{(m)*} = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 B\left(1 + \frac{\tilde{k}}{(m\pi)^4}\right).$$

Per j trascurabile ed $n = 1$ si ha infine

$$\sigma_m = \frac{2\pi}{T_m^*} = \frac{m^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{B}{\mu_0 + \mu}}\sqrt{1 - \frac{N_0 + \mu V^2}{N_{cr}^{(m)*}}} \tag{23}$$

in conformità con la nota espressione per la frequenza di un'asta semplicemente appoggiata agli estremi con sforzo assiale $N_0 + \mu V^2$ di massa $\mu_0 + \mu$ per unità di lunghezza e corrente su suolo elastico. Per $N_0 = 0$, $V = 0$ le condizioni (7) degli *estremi liberi* sono conservative. Si trova allora per le frequenze σ_n, in luogo della (23),

$$\sigma_n \simeq \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{B}{\mu_0 + \mu}} \,. \tag{24}$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. KRALL, *Sul problema centrale della dinamica dei ponti*, Nota I, questi « Rendiconti », vol. XIX, fasc. 6, dicembre 1955.

[2] J. KACPRZYNSKI and S. KALISKI, *Flutter of a deformable rocket in supersonic flow*, « Advances in Aeronautical Sciences », vol. 4, pp. 911–925. Pergamon Press, London–New York 1962.