
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GUIDO ZAPPA

Sulle S-partizioni di Hall di un gruppo finito

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 38 (1965), n.6, p. 755–759.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_6_755_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 17 giugno 1965

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

NOTE DI SOCI

Algebra. — *Sulle S-partizioni di Hall di un gruppo finito.* Nota (*) del Corrisp. GUIDO ZAPPA.

È noto che, se G è un gruppo, dicesi *partizione* di G un insieme Π di sottogruppi di G tale che ogni elemento di G diverso dall'unità appartiene ad un ed un solo sottogruppo $H \in \Pi$. L'attenzione sopra le partizioni di un gruppo è stata recentemente richiamata da alcuni problemi relativi al gruppo delle collineazioni di certi piani grafici (in particolare i piani di traslazione). La classificazione delle partizioni di un gruppo finito è stata oggetto di approfonditi studi, specialmente da parte di R. Baer, di O. Kegel e di M. Suzuki. In base ad essi, l'unico punto oscuro rimasto circa il problema di detta classificazione è quello che concerne le partizioni dei p -gruppi finiti.

Ultimamente, altri problemi relativi ai piani grafici hanno messo in luce (ved. [1] e [2] nella Bibliografia) l'opportunità di generalizzare il concetto di partizione, introducendo quello di S -partizione di un gruppo G rispetto ad un suo sottogruppo S . Se G è un gruppo, ed S è un suo sottogruppo, si dice S -*partizione* di G un insieme Π di sottogruppi di G tale che ogni elemento di G non contenuto in S appartenga ad uno ed uno solo dei prodotti SH ($H \in \Pi$).

Il problema della classificazione delle S -partizioni di un gruppo finito G rispetto ad un sottogruppo S si presenta oltremodo complesso. Se S è un sottogruppo normale di G e Π è una S -partizione, le immagini dei sottogruppi $H \in \Pi$ nell'omomorfismo naturale di G su G/S costituiscono un'ordinaria partizione

(*) Presentata nella seduta del 17 giugno 1965.

di G/S . Pertanto, nel caso in cui S sia normale, il nostro problema può ricondursi a quello della determinazione delle partizioni. È pertanto interessante individuare proprietà delle S -partizioni che implicino di necessità la normalità di S .

Nella presente Nota, che costituisce un primo contributo dell'autore allo studio delle S -partizioni, viene considerato il caso di S -partizioni di un gruppo finito G che siano *strette* (cioè tali che ogni sottogruppo appartenente alla S -partizione contenga S , e pertanto ogni elemento di G non contenuto in S appartenga ad uno ed un solo sottogruppo della S -partizione) e *di Hall*, cioè tali che tanto S che i sottogruppi della S -partizione siano sottogruppi di Hall di G (cioè aventi ordine primo con l'indice). Viene provato (nel n. 1) che se G è un gruppo finito, S un suo sottogruppo di Hall, e Π una S -partizione stretta di Hall di G , e se Π contiene almeno due sottogruppi più ampi di S , il sottogruppo S è normale. Nel n. 2 vengono dati esempi di S -partizioni non normali, che provano l'impossibilità di attenuare certe ipotesi del risultato precedente.

Notazioni:

$|G|$ = ordine del gruppo finito G ;

$[G:S]$ = indice del sottogruppo S nel gruppo finito G ;

$G - S$ = insieme degli elementi del gruppo G non contenuti nel sottogruppo S ;

$N(S)$ = normalizzante del sottogruppo S cioè sottogruppo di G costituito dagli elementi di G permutabili con S ;

$MCD(r, s)$ = massimo comune divisore degli interi positivi r ed s ;

$mcm(r, s)$ = minimo comune multiplo degli interi positivi r ed s .

1. Sia G un gruppo e sia S un suo sottogruppo. Dicesi S -partizione di G un insieme Π di sottogruppi di G tale che, per ogni $x \in G$, $x \notin S$, esiste uno ed un solo sottogruppo $H \in \Pi$ per cui $x \in SH$.

Se S è il sottogruppo unità, le S -partizioni di G coincidono con le ordinarie partizioni.

Una S -partizione Π di G si dirà *stretta* se per ogni $H \in \Pi$ si ha $S \subseteq H$; si dirà *banale* quando al più uno dei sottogruppi $H \in \Pi$ risulta non contenuto in S (onde Π può ridursi a quest'unico sottogruppo).

Se H è un gruppo finito ed S un suo sottogruppo, una S -partizione di G si dirà *semistretta*, se, per ogni $H \in \Pi$, l'ordine di $S \cap H$ eguaglia il massimo comune divisore degli ordini di S ed H .

Ovviamente, ogni S -partizione stretta è semistretta. Infatti, se $S \subseteq H$ si ha $S \cap H = S$, onde $|S \cap H| = |S|$, e poiché $|S|$ divide $|H|$, è $|S| = MCD(|S|, |H|)$.

Se G è un gruppo finito, e S è un suo sottogruppo di Hall, una S -partizione Π di G si dice *di Hall* se ogni $H \in \Pi$ è un sottogruppo di Hall di G .

Proviamo il seguente:

TEOREMA. *Sia G un gruppo finito risolubile, S un suo sottogruppo di Hall, e Π una S -partizione stretta di Hall non banale di G . Allora S è normale in G .*

Procediamo per assurdo, supponendo quindi che esistano gruppi per cui il teorema non è verificato. Entro tali classi di gruppi, sia G uno di quelli di ordine minimo.

Sia M un sottogruppo normale massimo in G , e sia p il suo indice. Essendo G risolubile, p è primo. Distinguiamo due casi:

- a) p non divide $|S|$,
- b) p divide $|S|$.

Esaminiamo il caso a).

Anzitutto, $|S|$ divide $|M|$. Inoltre, essendo $|S|$ primo con $[G:S]$, perché S è di Hall, si ha anche $|S|$ primo con $[M:S]$. Essendo M risolubile al pari di G , M contiene allora un sottogruppo $\bar{S}$ (di Hall) d'ordine $|S|$, coniugato ad S in G . D'altra parte M , essendo normale, contiene, assieme ad $\bar{S}$, tutti i sottogruppi coniugati ad $\bar{S}$ in G , quindi anche S . Ne segue che S è un sottogruppo di Hall di M .

Sia ora $H \in \Pi$. Allora, essendo M normale, si ha $[(H \cup M):H] = [M:H \cap M]$. Essendo H di Hall in G , e quindi anche in $H \cup M$, si ha che $[(H \cup M):H]$ è primo con $|H|$. Pertanto $[M:(H \cap M)]$ è primo con $|H|$ e quindi anche con $|H \cap M|$. Ne segue che $|H \cap M|$ è un sottogruppo di Hall di $|M|$.

Sia $x \in M - S$. Allora $x \in G - S$, onde esiste uno ed un solo sottogruppo $H \in \Pi$ tale che $x \in H$. Ne segue che $x \in M \cap H$. Né può aversi $x \in M \cap \bar{H}$ con $\bar{H} \in \Pi$, $\bar{H} \neq H$, perché sarebbe $x \in \bar{H}$, il che non può aversi, dato che $x \in G - S$. È poi ovviamente $S \subseteq M \cap H$ per ogni $H \in \Pi$, avendosi $S \subseteq M$, $S \subseteq H$. Ne segue che l'insieme Π_0 dei sottogruppi $M \cap H$, per H variabile in Π è una S -partizione stretta di Hall di M . A causa dell'ipotesi di minimo per l'ordine di G , si ha che S è normale in M , oppure che Π_0 è banale. Ma in questo secondo caso, per ogni $H \in \Pi$, ad eccezione al più di un particolare sottogruppo $H_0 \in \Pi$, si ha $H \cap M = S$. Essendo M normale in G , è $H \cap M$ normale in H , per ogni $H \in \Pi$, onde S è normale in ogni sottogruppo $H \in \Pi$, salvo al più H_0 . Allora ogni elemento di G è contenuto in almeno uno dei due sottogruppi H_0 e $N(S)$, onde si ha $G = H_0$ oppure $G = N(S)$. Ma se fosse $G = H_0$, ogni elemento $x \in G - S$ non appartarrebbe ad alcun sottogruppo $H \in \Pi$ con $H \neq H_0$, onde si avrebbe $H \subseteq S$ per ogni $H \in \Pi$, $H \neq H_0$, e Π sarebbe banale contro l'ipotesi. Pertanto, se si verifica il caso a), S è normale in G .

Esaminiamo ora il caso b). Si ponga $S_0 = S \cap M$. In base al fatto che M è normale in G , ragionando come si è fatto nel caso a) per provare che $H \cap M$ è un sottogruppo di Hall di M per ogni $H \in \Pi$, si ottiene in questo caso che tanto S_0 quanto $M \cap H$, per ogni $H \in \Pi$, sono sottogruppi di Hall di M . Inoltre, è $S_0 \subseteq H \cap M$ per ogni $H \in \Pi$, e, se $x \in M - S_0$, è $x \in G - S$, onde esiste uno e un solo $H \in \Pi$ tale che $x \in H$, cioè tale che $x \in M \cap H$. Pertanto, l'insieme Π_0 dei sottogruppi $M \cap H$ ($H \in \Pi$) è una S_0 -partizione stretta di Hall di M . Per l'ipotesi di minimo sull'ordine di G , si ha che S_0 è normale in M , oppure Π_0 è banale. Ma se Π_0 è banale, per ogni $H \in \Pi$, ad eccezione al più di un particolare sottogruppo $H_0 \in \Pi$, si ha $M \cap H = S_0$. Ragionando come nel caso a),

si ottiene allora che ogni elemento di G è contenuto in uno dei sottogruppi $N(S_0)$ e H_0 , onde $G = H_0$ o $G = N(S_0)$. Ma se fosse $G = H_0$, Π sarebbe banale, onde $G = N(S_0)$, e S_0 risulta normale in G , quindi anche in M . Pertanto in ogni caso S_0 è normale in M . Ma S_0 è un sottogruppo di Hall di M , e pertanto è unico del suo ordine, cioè caratteristico in M . Essendo M normale in G , si ha che anche S_0 è normale in G .

Sia ora $\bar{\Pi}$ l'insieme dei sottogruppi di G/S_0 della forma H/S_0 , con $H \in \Pi$. Si ponga $\bar{G} = G/S_0$, $\bar{S} = S/S_0$, e, per ogni $H \in \Pi$, si ponga $\bar{H} = H/S_0$. Se $\bar{x} \in \bar{G} - \bar{S}$, è $\bar{x} = x S_0$ con $x \in G - S$. Esiste allora uno e un solo sottogruppo $H \in \Pi$ tale che $x \in H$, onde $\bar{H} = H/S_0$ è l'unico sottogruppo $\in \bar{\Pi}$ a cui $\bar{x}$ appartenga. Inoltre è $\bar{S} \subseteq \bar{H}$ per ogni $\bar{H} \in \bar{\Pi}$, perché è $S \subseteq H$, per ogni $H \in \Pi$. Essendo poi $[\bar{G} : \bar{S}] = [G : S]$, $|\bar{S}|$ divisore di $|S|$, e $[G : S]$ primo con $|S|$ (perché S è di Hall) si ha che $[\bar{G} : \bar{S}]$ è primo con $|\bar{S}|$; analogamente si vede che, per ogni $\bar{H} \in \bar{\Pi}$, si ha $[\bar{G} : \bar{H}]$ primo con $|\bar{H}|$. Pertanto $\bar{S}$ e gli $\bar{H}$ sono di Hall per $\bar{G}$, onde $\bar{\Pi}$ è una $\bar{S}$ -partizione stretta di Hall di $\bar{G}$. Per l'ipotesi di minimo sull'ordine di G , si ha che allora $\bar{S}$ è normale o $\bar{\Pi}$ è banale. Ma se $\bar{\Pi}$ è banale, tutti i sottogruppi $\bar{H} \in \bar{\Pi}$, salvo al più uno, coincidono con $\bar{S}$, onde tutti i sottogruppi $H \in \Pi$, salvo al più uno, coincidono con S ; e ciò non può essere perché per ipotesi Π non è banale. Pertanto $\bar{S}$ è normale in $\bar{G}$, onde S è normale in G , e il teorema è dimostrato.

COROLLARIO. *Sia G un gruppo finito risolubile, S un suo sottogruppo di Hall, e Π una S -partizione semistretta di Hall non banale di G tale che ogni $H \in \Pi$ sia permutabile con S . Allora S è normale in G .*

Infatti in tal caso, per ogni $H \in \Pi$, SH è un sottogruppo di Hall di G . Si noti infatti che $|SH| = |S| |H| / |S \cap H| = |S| |H| / \text{MCD}(|S|, |H|) = \text{mcm}(|S|, |H|)$. Se p è un divisore primo di $|G|$, e p^α la massima potenza di p che divide $|G|$, si ha che $|SH|$ risulta primo con p se tanto $|S|$ che $|H|$ lo sono; mentre se p divide almeno uno dei numeri $|S|$ ed $|H|$, per esempio $|S|$, anche p^α divide $|S|$, perché S è di Hall, e quindi p^α divide $|SH|$. Quindi $|SH|$ o è primo con p , o è divisibile per p^α . E da ciò discende subito che SH è di Hall per ogni $H \in \Pi$, come si era detto.

Posto $H^* = SH$ per ogni $H \in \Pi$, si ha che l'insieme Π^* costituito dai sottogruppi H^* è una S -partizione stretta di Hall non banale di G , e pertanto, in base al teorema, S risulta normale.

2. Nel corollario precedente, l'ipotesi che ogni sottogruppo $H \in \Pi$ sia permutabile con S non può essere eliminata. Si consideri infatti il gruppo $G = \{a, b\}$ con le relazioni

$$a^6 = b^7 = 1, \quad a^{-1}ba = b^3.$$

Si ponga $S = \{a^2\}$, $H_i = \{a^3 b^{i-1}\}$ ($i = 1, \dots, 7$), $H_8 = \{b\}$. Allora l'insieme Π costituito dai sottogruppi H_i ($i = 1, \dots, 8$) è una S -partizione semistretta di Hall di G . Infatti $|S| = 3$, $|H_i| = 2$ ($i = 1, \dots, 7$), $|H_8| = 7$, $|G| = 42$, onde tanto S che gli H_i ($i = 1, \dots, 8$) sono sottogruppi di Hall di G , ed inoltre $|S \cap H_i| = 1 = \text{MCD}(|S|, |H_i|)$ ($i = 1, \dots, 8$). Preso poi un elemento

$x \in G - S$, si ha $x = a^{2^n-1} b^m$ ($n = 1, 2, 3; m = 0, 1, \dots, 6$) oppure $x = a^{2^n} b^m$ ($n = 1, 2, 3; m = 1, \dots, 6$). Se $x = a^{2^n-1} = a^{2^n-1} b^0$, si ha $x \in SH_1$; se $x = a^{2^n-1} b^m$ ($m = 1, \dots, 6$) è $x \in SH_{m+1}$; se infine è $x = a^{2^n} b^m$ ($m = 1, \dots, 6$) si ha $x \in SH_8$. Quindi ogni elemento $x \in G - S$ appartiene ad uno ed uno solo degli insiemi SH_i ($i = 1, \dots, 8$), e pertanto Π è una S-partizione semistretta di Hall non banale. D'altra parte S non è normale, avendosi $b^{-1} S b = b^{-1} \{a^2\} b = \{a^2 b^6\} \neq S$.

Il più semplice esempio di S-partizioni di Hall non semistrette si ha nei gruppi diedrali. Sia $G = \{a, b\}$ con $a^2 = b^m = 1$, $a^{-1} b a = b^{-1}$ (m dispari). Allora, posto $S = \{a\}$, $H = \{ab^i\}$ ($i = 1, \dots, m-1$), si ha $|S| = |H_i| = 2$, e ogni elemento $x \in G - S$, potendosi esprimere nella forma $x = a^r b^i$ ($r = 0, 1; i = 1, \dots, m-1$) appartiene ad uno ed uno solo dei prodotti SH_i .

BIBLIOGRAFIA.

- [1] R. LINGENBERG, *Ueber Gruppen projektiver Kollineationen, welche eine perspektive Dualität invariant lassen*, « Arch. der Math. », 13, 385-400 (1962).
- [2] G. ZAPPA, *Sugli spazi generali quasi di traslazione*, « Le Matematiche, Catania », 19, 127-143 (1964).

RÉSUMÉ. — Soit G un groupe et soit S un sous-groupe de G . On appelle S-partition de G un ensemble Π de sous-groupes de G tel que si $x \in G$ et $x \notin S$, il y a un seul sous-groupe $H \in \Pi$ pour lequel $x \in SH$. Si $H \supseteq S$ pour tout $H \in \Pi$, Π est dite une S-partition étroite de G . On démontre que si G est fini résoluble, si S et les sous-groupes $H \in \Pi$ sont des sous-groupes propres de Hall de G (c'est à dire, des sous-groupes propres dont l'ordre est premier avec l'indice) et si Π est étroite, S est normal dans G .