Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giannantonio Pezzoli

Sulla teoria delle onde d'emersione e di impulso. Una soluzione rigorosa ad energia finita del problema di Cauchy e Poisson per moto piano

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.5, p. 660–669.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_5_660_0>

Idrodinamica. — *Sulla teoria delle onde d'emersione e di impulso. Una soluzione rigorosa ad energia finita del problema di Cauchy e Poisson per moto piano.* Nota di GIANNANTONIO PEZZOLI, presentata (*) dal Corrisp. G. SUPINO.

1. La teoria delle onde prodotte in acqua di profondità grandissima da una perturbazione locale del pelo libero, è stata studiata in due classiche Memorie da Cauchy [1] e Poisson [2].

Il problema affrontato da questi Autori e risolto approssimativamente tanto nel caso di moto ondoso piano quanto nel caso a simmetria centrale, si riferisce a perturbazione concentrate provocate da assegnate configurazioni iniziali del pelo libero o da un impulso del pari assegnato, tali comunque da rendere infinita l'energia dell'onda così provocata. Dal punto di vista matematico la questione è di tale complessità che solo alquanto più tardi è stata ripresa da altri Autori: Lamb [3], Lord Kelvin [4], che elaborò allo scopo l'interessantissimo metodo approssimato della « fase stazionaria », ed ancora Sneddon [5], Stoker [6] ed Hinze [7] che ha ripreso in tempi recenti lo studio del caso a simmetria centrale. Tutti questi studiosi si sono occupati sempre di problemi a energia iniziale infinita, e perciò non corrispondenti ad un possibile schema fisico e conseguentemente di scarso interesse pratico.

Solo recentemente i giapponesi Unoki e Nakano [8], in una serie di Memorie hanno tentato di affrontare lo studio di schemi più complessi, giungendo a risultati approssimati per il caso di perturbazioni iniziali di forma rettangolare, e per impulsi iniziali aventi analoga distribuzione.

Questi Autori, nelle Note citate, hanno eseguito controlli sperimentali e qualche sviluppo analitico anche per la situazione a simmetria centrale tenendo conto, sempre approssimativamente, dell'azione della viscosità.

Ma anche in quest'ultima ricerca il calcolo è stato fatto per un caso con energia iniziale infinita.

In questa Nota si ottiene, ritengo per la prima volta, una soluzione rigorosa per il problema di Cauchy e Poisson con onda iniziale assegnata avente energia finita, nello schema di moto piano irrotazionale di fluido perfetto.

2. Riportiamo brevemente la nota soluzione di Poisson e Cauchy, riferendoci al caso fondamentale in cui è assegnata una certa configurazione iniziale del pelo libero, data da una sopraelevazione di altezza infinita e di base infinitesima, posta nell'origine degli assi, tale comunque che sia unitaria la sezione longitudinale (e quindi il volume per unità di larghezza del canale) della perturbazione stessa.

(*) Nella seduta dell'8 maggio 1965.

Le onde in esame sono considerate in profondità infinita.

Dovendo, per le cose dette, esistere un potenziale del moto, assunto l'asse y positivo verso l'alto, per la condizione di Poisson sul pelo libero

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \qquad (\text{per } y = 0) \tag{1}$$

e per l'equazione di continuità

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

risulta notoriamente assegnata una soluzione particolare a variabili separate del tipo [3]:

$$\varphi = g \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} \cos kx \tag{3}$$

essendo

$$\sigma^2 = gk \qquad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right) \tag{4}$$

e λ lunghezza d'onda generica.

La sopraelevazione η dell'onda, risulta dalla

$$\eta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{y=0} \tag{5}$$

e, corrispondentemente alla (3) è data da:

$$\eta = \cos \sigma t \cos kx . \tag{6}$$

Ora la soluzione particolare (3), (6) non soddisfa alle condizioni iniziali assegnate di liquido fermo ed orizzontale tranne un'intumescenza di sezione longitudinale unitaria e di altezza infinita all'origine delle x.

È possibile, data la linearità delle equazioni, soddisfare alle condizioni del problema, sommando infinite soluzioni del tipo (3) e (6) con un integrale di Fourier.

Essendo $\eta = f(x)$ per $t = 0$, si scrive immediatamente

$$\varphi = \frac{g}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(a) \cos k(x - a)\, da\right] \tag{7}$$

e

$$\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\cos \sigma t \, dk \int_{-\infty}^{\infty} f(a) \cos k(x - a)\, da\right] . \tag{8}$$

L'elevazione iniziale del pelo libero è caratterizzata dalla relazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(a)\, da = 1 \tag{9}$$

per cui le (7), (8), divengono immediatamente

$$\varphi = \frac{g}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky} \cos kx \, dk \tag{10}$$

$$\eta = \frac{1}{\pi} \int \cos \sigma t \cos kx \, dk \, . \tag{11}$$

Con ciò il problema è formalmente risolto; resta tuttavia da esplicitare il risultato: ci occuperemo qui dell'espressione di η che è quella di più immediato interesse. Scriviamo

$$\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2!} + \frac{\sigma^4 t^4}{4!} \cdots \right) \cos kx \, dk \tag{12}$$

e ricordiamo che dalla teoria delle funzioni Γ si hanno le espressioni

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^\infty k^n \cos kx \, dk &= \frac{n!}{x^{n+1}} \cos \left[(n+1)\frac{\pi}{2}\right] \\ \int_0^\infty k^n \sin kx \, dk &= \frac{n!}{x^{n+1}} \sin \left[(n+1)\frac{\pi}{2}\right] \cdot \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Con la 1ª delle (2) e la (4) otteniamo immediatamente:

$$\eta = \frac{1}{\pi x} \cdot \frac{gt^2}{2x} \left[1 - \frac{1}{3 \cdot 5}\left(\frac{gt^2}{2x}\right)^2 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}\left(\frac{gt^2}{2x}\right)^4 \cdots \right] . \tag{14}$$

Richiamiamo ora le definizioni degli integrali di Fresnel C (z) e S (z) nella forma più moderna, date da [9], [10]; è:

$$\left\{ \begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \frac{\cos s}{\sqrt{s}} \, ds \\ S(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \frac{\sin s}{\sqrt{s}} \, ds \text{ (1)}. \end{aligned} \right. \tag{15}$$

Delle due trascendenti ora citate ed estesamente tabulate [9] si possono dare notevoli espressioni sotto forma di serie [10]; si ha ad esempio:

$$C\left(\frac{z}{2}\right) = \sqrt{\frac{z}{\pi}} \left[\left(1 - \frac{z^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{z^4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \cdots \right) \cos z + \right. \\ \left. + \left(\frac{z}{1 \cdot 3} - \frac{z^3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \cdots \right) \sin z \right] \tag{16}$$

(1) La definizione degli integrali di Fresnel qui adottata, è la più recente, ed è quella riportata in [9] e [10]; alcuni Autori, vedi ad esempio [3], [5] usano una definizione diversa, e precisamente quella che compare in: JAHNKE–EMDE, *Funktionentafeln*, Leipzig und Berlin 1933.

$$\mathrm{S}\left(\frac{z}{2}\right)=\sqrt{\frac{z}{\pi}}\left[\left(1-\frac{z^2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{z^4}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}\cdots\right)\sin z-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{z}{1\cdot3}-\frac{z^3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\cdots\right)\cos z\right]. \tag{17}$$

Dalle (16) e (17), si ottiene quindi:

$$\mathrm{F}(z)=1-\frac{z^2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{z^4}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}\cdots=\sqrt{\frac{\pi}{z}}\left[\cos\frac{z}{2}\,\mathrm{C}\left(\frac{z}{2}\right)+\sin\frac{z}{2}\,\mathrm{S}\left(\frac{z}{2}\right)\right] \tag{18}$$

e quindi dalla (14), posto $z = gt^2/2x$, si ha in definitiva (vedi anche in maniera analoga [3]):

$$\eta=\sqrt{\frac{g}{2\pi}}\,\frac{t}{x^{3/2}}\left[\cos\frac{gt^2}{4x}\,\mathrm{C}\left(\frac{gt^2}{4x}\right)+\sin\frac{gt^2}{4x}\,\mathrm{S}\left(\frac{gt^2}{4x}\right)\right] \tag{19}$$

che per valori grandi di $gt^2/4x$, dato che $\mathrm{C}(z)$ e $\mathrm{S}(z)$ tendono entrambi a $1/2$ per $z \to \infty$, diviene;

$$\eta=\sqrt{\frac{g}{8\pi}}\,\frac{t}{x^{3/2}}\left(\cos\frac{gt^2}{4x}+\sin\frac{gt^2}{4x}\right). \tag{20}$$

Questo risultato è notissimo e trovato da vari ricercatori con metodi diversi [2], [6]; pertanto non si insiste qui sui vari aspetti del fenomeno che comporta la formazione di un'onda che si propaga con accelerazione costante, caratteristica comune a tutte le onde di questo tipo.

Sono tuttavia note anche le critiche che si possono portare a questa soluzione dal punto di vista fisico: si tratta infatti di una soluzione che in un punto assegnato fornisce un'onda che si esalta al passare del tempo, proporzionalmente a quest'ultimo. Ciò proviene dallo schema fatto di una perturbazione iniziale di volume finito e di altezza infinita, dotata di energia potenziale infinita.

Questo schema è tale da non corrispondere a nessun fenomeno realizzabile e non consente di sottoporre la teoria a controllo sperimentale; d'altra parte la complessità dei calcoli, già con uno schema assai semplice, è tale da aver finora impedito soluzioni più raffinate in base a schemi più aderenti alla realtà fisica.

Vediamo ora come si possa giungere alla soluzione rigorosa del problema delle onde progressive superficiali in profondità infinita, quando l'intumescenza originale, confinata in prossimità dell'origine delle x, abbia volume (area, essendo il moto piano) finito, altezza finita, e quindi anche energia potenziale finita: osserveremo, così facendo, che ogni incongruità della soluzione viene a cadere.

3. Le equazioni dalla (1) alla (8) restano perfettamente valide, mentre la (9), avendo scelto per perturbazione iniziale un'onda di forma rettangolare di lunghezza δ e di altezza A, viene così sostituita; essendo, come al solito,

$\eta = f(x)$ per $t = 0$. sarà:

$$(21)\qquad \begin{cases} f(x) = \mathrm{A} & \text{per } -\dfrac{\delta}{2} \leq x \leq \dfrac{\delta}{2} \\ f(x) = 0 & \text{per } \begin{cases} -\infty < x < -\dfrac{\delta}{2} \\ \dfrac{\delta}{2} < x < \infty . \end{cases} \end{cases}$$

Porremo inoltre

$$(22)\qquad \mathrm{A}\delta = 1 \qquad (\mathrm{A} \text{ e } \delta \text{ costanti})$$

per rendere unitaria la sezione longitudinale dell'intumescenza iniziale; l'energia potenziale sarà quindi proporzionale a $1/\delta$.

Ne viene di conseguenza che la (7) e la (8) divengono:

$$(23)\qquad \begin{cases} \varphi = \dfrac{g}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \left[\dfrac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{ky}\, dk \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \mathrm{A} \cos k(x-a)\, da \right] \\ \eta = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \left[\cos \sigma t\, dk \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \mathrm{A} \cos k(x-a)\, da \right] \end{cases}$$

che integrate una prima volta, e tenuto conto della (22) danno:

$$(24)\qquad \begin{cases} \varphi = \dfrac{2g}{\delta\pi} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\sin \sigma t}{\sigma k} e^{ky} \cos kx \sin \dfrac{k\delta}{2}\, dk \\ \eta = \dfrac{2}{\delta\pi} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{\cos \sigma t}{k} \cos kx \sin \dfrac{k\delta}{2}\, dk . \end{cases}$$

Le (24) forniscono, passando al limite sotto il segno di integrale per $\delta \to 0$ le formule (10) ed (11) già considerate.

Noi studieremo qui, come già fatto in precedenza, l'espressione di η, per quanto ora molto più complessa, e confronteremo il risultato con le (19) e (20) trovate nel caso di energia infinita dell'onda iniziale.

Scriviamo la 2ª delle (24) nel seguente modo, tenendo conto della (4):

$$(25)\qquad \eta = \frac{2}{\pi\delta} \int_0^\infty \frac{\cos \sigma t}{\sigma} \left[\sin \frac{\sigma^2}{g}\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - \sin \frac{\sigma^2}{g}\left(x - \frac{\delta}{2}\right) \right] d\sigma$$

ed esaminiamo l'integrale

$$(26)\qquad \mathrm{I} = \int_0^\infty \frac{\cos \sigma t}{\sigma} \sin \alpha\sigma^2\, d\sigma$$

del tipo di quelli che compaiono nella (25), avendo posto

$$(27)\qquad \alpha = \frac{1}{g}\left(x \pm \frac{\delta}{2}\right).$$

Sviluppando in serie il coseno, si ha:

$$(28) \qquad \int_0^\infty \frac{\cos \sigma t}{\sigma} \sin \alpha\sigma^2 \, d\sigma = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty (-1)^n \frac{t^{2n} \sigma^{2(n-1)} \sin \alpha\sigma^2}{(2n)!} \, d\sigma^2$$

ma il primo termine della serie è, a parte il coefficiente, l'integrale di Dirichlet

$$(29) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin \alpha\sigma^2}{\sigma^2} \, d\sigma^2 = \frac{\pi}{2}$$

per cui:

$$(30) \qquad I = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty \nu^{n-1} \sin \alpha\nu \, d\nu \right]$$

avendo posto $\nu = \sigma^2$.

Ricordando inoltre la 2ª delle formule (13) che si può riscrivere

$$(31) \qquad \int_0^\infty \nu^{n-1} \sin \alpha\nu \, d\nu = \frac{(n-1)!}{\alpha^n} \sin \frac{n\pi}{2}$$

risulta immediatamente

$$(32) \qquad I = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-2)!}{(4n-2)!} \frac{t^{4n-2}}{\alpha^{2n-2}} \right].$$

La serie che compare nella (32) è assolutamente convergente, e il coefficiente n^{mo} tende a 0 come $1/n^{2n}$; lo si può facilmente vedere usando la formula di Stirling per il calcolo asintotico dei fattoriali.

Ne risulta di conseguenza che sostituendo il valore di I nella (25), prendendo α una volta eguale a $\dfrac{x+\frac{\delta}{2}}{g}$ e una volta eguale a $\dfrac{x-\frac{\delta}{2}}{g}$, si ottiene come risultato:

$$(33) \qquad \eta = \frac{1}{\pi\delta} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-2)!}{(4n-2)!} 2^{2n-1} \left[\left(\frac{gt^2}{2x+\delta} \right)^{2n-1} - \left(\frac{gt^2}{2x-\delta} \right)^{2n-1} \right]$$

e ancora, mettendo in evidenza il parametro $gt^2/2x$:

$$(34) \qquad \eta = \frac{1}{\pi\delta} \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-2)!}{(4n-1)!} 2^{2n-1} \left(\frac{gt^2}{2x} \right)^{2n-1} \cdot \left[\frac{1}{\left(1-\frac{\delta}{2x}\right)^{2n-1}} - \frac{1}{\left(1+\frac{\delta}{2x}\right)^{2n-1}} \right].$$

Questa espressione, con semplici passaggi, considerato $\frac{\delta}{2x} < 1$, sviluppando in serie il termine fra parentesi quadra, diviene:

$$(35) \qquad \eta = \frac{1}{\pi x} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n-3)!!} \binom{2n-2}{2m+1} \frac{1}{2(n-m)} \left(\frac{gt^2}{2x} \right)^{2n-1} \left(\frac{\delta}{2x} \right)^{2(m-1)}$$

che si può anche porre nella forma:

$$\eta = \frac{1}{\pi x} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n-3)!!} \left(\frac{gt^2}{2x}\right)^{2n-1} \cdot \tag{35'}$$

$$\cdot \left[1 + \frac{(2n-2)(2n-3)}{3!} \left(\frac{\delta}{2x}\right)^2 + \frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)}{5!} \left(\frac{\delta}{2x}\right)^4 \cdots\right].$$

Abbiamo dunque una serie, ogni termine della quale è a sua volta costituito da una serie; osservando il primo termine, notiamo subito che esso costituisce la soluzione del problema visto in precedenza: posto quindi come di consueto $z = gt^2/2x$, con la definizione (18) di $F(z)$, indicando con $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p$ i vari termini della serie (35′), cioè

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \cdots + \eta_p \qquad (p \to \infty) \tag{36}$$

abbiamo

$$\eta_1 = \frac{z}{\pi x} F(z). \tag{37}$$

Si può ora scrivere

$$\eta_2 = \frac{1}{\pi x} \cdot \left(\frac{\delta}{2x}\right)^2 \frac{1}{3!} \left(-\frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 5} z^3 + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} z^5 - \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 13} z^7 \cdots\right) \tag{38}$$

e osservare che la serie fra parentesi è uguale a

$$z^3 \frac{d^2 F(z)}{dz^2} = -\frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 5} z^3 + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} z^5 \cdots \tag{39}$$

per η_2 si riduce a

$$\eta_2 = \frac{1}{\pi x} \frac{z^3}{3!} \frac{d^2 F(z)}{dz^2} \left(\frac{\delta}{2x}\right)^2. \tag{40}$$

Analogamente è:

$$\eta_3 = \frac{1}{\pi x} \left(\frac{\delta}{2x}\right)^4 \frac{1}{5!} \left(\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} z^5 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 13} z^7 \cdots\right) \tag{41}$$

e anche qui si nota che si può ottenere la serie tra parentesi derivando 4 volte $F(z)$ rispetto a z e moltiplicando per z^5, cioè

$$z^5 \frac{d^4 F(z)}{dz^4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} z^5 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdots 13} z^7 \cdots \tag{42}$$

in modo che η_3 diviene

$$\eta_3 = \frac{1}{\pi x} \frac{z^5}{5!} \frac{d^4 F(z)}{dz^4} \left(\frac{\delta}{2x}\right)^4. \tag{43}$$

Emerge ora chiaramente la legge di formazione dei termini della (36) che si può pertanto scrivere:

$$\eta = \frac{z}{\pi x}\left[F(z) + \frac{z^2}{3!}\left(\frac{\delta}{2x}\right)^2 F''(z) + \frac{z^4}{5!}\left(\frac{\delta}{2x}\right)^4 F^{IV}(z) \cdots\right]. \tag{44}$$

A questo punto cerchiamo di dare un'espressione che costituisca la somma della (44); a questo scopo introduciamo la funzione

$$\Phi(z) = \int_0^z F(z)\, dz \; ; \tag{45}$$

posto ora per semplicità

$$\frac{\delta}{2x} = \beta \tag{46}$$

possiamo facilmente trasformare la (44) nella:

$$\eta = \frac{1}{\pi\beta x}\left(\beta z\, \Phi' + \frac{\beta^3 z^3}{3!}\, \Phi''' + \frac{\beta^5 z^5}{5!}\, \Phi^{\mathrm{v}} \cdots\right) \tag{47}$$

avendo, come al solito, indicato con gli apici le derivazioni rispetto a z.

Sviluppiamo ora in serie di Taylor, nell'intorno di z le due espressioni

$$\left\{\begin{aligned} \Phi[z(1+\beta)] &= \Phi(z+\beta z) = \Phi(z) + \beta z\, \Phi'(z) + \frac{\beta^2 z^2}{2!}\, \Phi''(z) + \cdots \\ \Phi[z(1-\beta)] &= \Phi(z-\beta z) = \Phi(z) - \beta z\, \Phi'(z) + \frac{\beta^2 z^2}{2!}\, \Phi''(z) - \cdots \end{aligned}\right. \tag{48}$$

sottraiamo la seconda dalla prima e dividiamo per 2, ottenendo così la serie che compare nella (47); si ha infatti:

$$\frac{\Phi[z(1+\beta)] - \Phi[z(1-\beta)]}{2} = \beta z\, \Phi'(z) + \frac{\beta^3 z^3}{3!}\, \Phi'''(z) + \frac{\beta^5 z^5}{5!}\, \Phi^{\mathrm{v}}(z) \cdots \tag{49}$$

e quindi η assume la forma:

$$\eta = \frac{1}{2\pi\beta x}\{\Phi[z(1+\beta)] - \Phi[z(1-\beta)]\}^{(2)}. \tag{50}$$

Ma è, per posizione

$$\Phi(z) = \int_0^z F(z)\, dz = \int_0^z \sqrt{\frac{\pi}{z}}\left[\cos\frac{z}{2}\, C\left(\frac{z}{2}\right) + \sin\frac{z}{2}\, S\left(\frac{z}{2}\right)\right] dz \tag{51}$$

(2) Si osservi a questo punto che partendo dalle regole del calcolo operatorio [11] si poteva valutare subito la (47) scrivendola nella forma:

$$\eta = \frac{1}{\pi\beta x}\,[\mathrm{sh}\, \beta z\, D]\, \Phi \tag{47'}$$

avendo indicato con D l'operazione di derivata rispetto a z, $D = (d/dz)$, ricordando che il prodotto simbolico zD non è invertibile e quindi l'operatore in questione non commutativo.

Conoscendo la valutazione dell'operatore e^{kD}, applicato ad una generica funzione $\varphi(z)$, che come è noto [11] è dato da:

$$e^{kD}\, \varphi(z) = \varphi(z+k) \tag{47''}$$

si poteva giungere alla (50), qui ricavata direttamente.

da cui, spezzando l'integrale nella somma di due, ricordando la definizione (15) delle funzioni di Fresnel e integrando per parti, si ottiene immediatamente

$$\Phi(z) = \pi\left[C^2\left(\frac{z}{2}\right) + S^2\left(\frac{z}{2}\right)\right]. \tag{52}$$

Utilizzando la formula ora trovata, ricordando il valore (46) di β, ed essendo $z = gt^2/2x$, la (50) fornisce infine la soluzione esatta del problema in termini di funzioni note e tabulate; è:

$$\eta = \frac{1}{\delta}\left\{C^2\left[\frac{gt^2}{4x}\left(1+\frac{\delta}{2x}\right)\right] - C^2\left[\frac{gt^2}{4x}\left(1-\frac{\delta}{2x}\right)\right] + S^2\left[\frac{gt^2}{4x}\left(1+\frac{\delta}{2x}\right)\right] - S^2\left[\frac{gt^2}{4x}\left(1-\frac{\delta}{2x}\right)\right]\right\}. \tag{53}$$

Cerchiamo ora, in analogia con la (20) una espressione asintotica di η, valida per grandi valori di $gt^2/4x$; sono note le espressioni degli integrali di Fresnel valide per grandi valori della variabile:

$$\begin{cases} C(s) \simeq \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin s}{\sqrt{2\pi s}} \\[2mm] S(s) \simeq \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos s}{\sqrt{2\pi s}}. \end{cases} \tag{54}$$

Introducendo le (54) nella (53), eseguendo i calcoli e trascurando le quantità piccole come $1/z$ rispetto a quelle dell'ordine di $1/\sqrt{z}$, si ottiene alla fine, lasciando sempre in evidenza $gt^2/4x$:

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\left(\dfrac{gt^2}{4x}\cdot\dfrac{\delta}{2x}\right)}{\delta\sqrt{\dfrac{gt^2}{4x}}}\left(\cos\frac{gt^2}{4x} + \sin\frac{gt^2}{4x}\right). \tag{55}$$

Si vede ora che l'onda in un luogo assegnato tende a 0 per $t \to \infty$ come $1/t$, essendo il numeratore sempre limitato, e ciò è perfettamente coerente dal punto di vista fisico, mentre la (55), passando al limite per $\delta \to 0$ fornisce esattamente la (20) che invece si esalta e tende all'∞ per $t \to \infty$ proporzionalmente a t stesso.

4. Il problema complementare a quello ora risolto, di determinare cioè l'onda risultante dall'applicazione di un impulso distribuito uniformemente da $-\delta/2$ a $\delta/2$ sulla superficie in quiete, si risolve immediatamente tenendo presente [3] che occorre ora sommare con un integrale di Fourier tante soluzioni semplici del tipo

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{e^{ky}}{\rho}\cos\sigma t\cos kx \\[2mm] \eta = -\dfrac{\sigma}{\rho g}\sin\sigma t\cos kx \end{cases} \tag{56}$$

il luogo delle (3) e (6). Il problema, per $\delta \to 0$ è stato risolto approssimativamente da Cauchy e Poisson [1] [2], ed esattamente da Sneddon [5].

Per δ finito la questione sarebbe assai più complicata, ma se si osserva che le (56) sono dedotte dalle (3) e (6) eseguendo sulle stesse l'operazione $\frac{1}{\rho g}\frac{\partial}{\partial t}$, ρ essendo la densità del liquido, per la linearità dell'integrale di Fourier, dalla (53) si ottiene subito la soluzione per un impulso unitario senza eseguire nuovi complessi calcoli; è:

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\rho\delta\sqrt{gx}}\left[\sqrt{1+\frac{\delta}{2x}}\left\{C\left[\frac{gt^2}{4x}\left(1+\frac{\delta}{2x}\right)\right]\cos\left[\frac{gt^2}{2x}\left(1+\frac{\delta}{2x}\right)\right]+\right.\right. \tag{57}$$
$$\left.+\,S\left[\frac{gt^2}{4x}\left(1+\frac{\delta}{2x}\right)\right]\sin\left[\frac{gt^2}{4x}\left(1+\frac{\delta}{2x}\right)\right]\right\}-\sqrt{1-\frac{\delta}{2x}}\left\{C\left[\frac{gt^2}{4x}\left(1-\frac{\delta}{2x}\right)\right]\cdot\right.$$
$$\left.\left.\cdot\cos\left[\frac{gt^2}{4x}\left(1-\frac{\delta}{2x}\right)\right]+S\left[\frac{gt^2}{2x}\left(1-\frac{\delta}{2x}\right)\right]\sin\left[\frac{gt^2}{4x}\left(1-\frac{\delta}{2x}\right)\right]\right\}\right].$$

Quest'ultimo risultato tuttavia non è di grande interesse, dato che il caso rientra, come già osservato dallo Stoker [6], che fornisce una soluzione approssimata per valori di $\frac{gt^2}{4x}\to\infty$, nella categoria dei problemi con energia iniziale infinita.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. CAUCHY, *Mémoires sur la théorie des ondes*, «Mém. de l'Acad. roy. des Sciences» (1827).

[2] S. D. POISSON, *Mémoire sur la théorie des ondes*, «Mém. de l'Acad. roy. des Sciences», (1816).

[3] H. LAMB, *Hydrodynamics*, Cambridge, sixth edition.

[4] W. THOMSON (Lord Kelvin), *On the waves produced by a single impulse in water of any depth, or in a dispersive medium*, Papers (1887).

[5] I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, McGraw-Hill (1951).

[6] J. J. STOKER, *Water waves*, Interscience publishers (1957).

[7] J. O. HINZE, *Die Erzeugung von Ringwellen auf einer Flüssigkeitsoberfläche durch periodisch wirkende Druckkräfte*, «Zeitschrift für ang. Math. und. Mech.», Bd. 16 (1936).

[8] S. UNOKI, M. NAKANO, *On the Cauchy-Poisson waves caused by the eruption of a submarine volcano*, «Oceanographical Magazine», n° 3 paper (1953).

[9] W. FLÜGGE, *Four-place tables of trascendental functions*, Pergamon press, London (1954).

[10] JAHNKE-EMDE-LÖSCH, *Tables of higher functions*, Sixth edition, McGraw-Hill (1960).

[11] N. W. MCLACHLAN, *Complex variable and operational calculus with technical applications*.