ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

MARIO ALBERTO CHIORINO

Formulazione teorica di un duale del principio di McHenry per il conglomerato cementizio

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.5, p. 655–659.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_5_655_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Meccanica. — *Formulazione teorica di un duale del principio di McHenry per il conglomerato cementizio.* Nota di MARIO ALBERTO CHIORINO, presentata [*] dal Socio G. COLONNETTI.

Il principio di sovrapposizione degli effetti del tempo e di reversibilità dei fenomeni viscosi, enunciato da McHenry [1] per il conglomerato cementizio, sulla base di considerazioni sperimentali, è stato interpretato teoricamente da Levi [2] attribuendo al conglomerato una equazione del tipo:

$$\frac{d\bar{\mathcal{E}}}{dt} + \mathrm{R}\,\bar{\mathcal{E}}\,\bar{\varepsilon}_0' - \mathrm{QS}\,\bar{\varepsilon}_0' = 0 \tag{1}$$

che lega nel tempo la deformazione viscosa del calcestruzzo $\bar{\mathcal{E}}$ («fluage») alla sollecitazione applicata S e al fluage specifico $\bar{\varepsilon}_0$ della frazione viscoelastica dell'impasto (pasta cementizia). R e Q sono due coefficienti numerici che caratterizzano il conglomerato in esame. Alla equazione (1) si è indotti dalla schematizzazione del conglomerato secondo una fibra del tipo parallelo, nella quale alla frazione viscoelastica (pasta) è associata un'anima elastica (inerte). L'equazione (1), oltre a risultare in accordo con il principio di McHenry, permette di tradurre in termini analitici, e con buona aderenza alla realtà [1], i principali, aspetti del comportamento del conglomerato cementizio sotto l'azione di carichi e distorsioni costanti o variabili.

Il principio di McHenry riguarda le deformazioni del conglomerato in condizioni di carico costante: scopo della presente Nota è quello di dimostrare come un'equazione reologica del tipo (1) permetta di dedurre un principio duale del precedente, relativo invece agli sforzi nel conglomerato in condizioni di deformazione costante. Tale principio, che trova una sua immediata applicazione nella valutazione degli effetti di «ritaratura» delle tensioni nelle strutture poste in stato di coazione mediante la introduzione di distorsioni [2], si può esprimere come segue:

Lo sforzo prodotto nel calcestruzzo a un tempo generico t da un incremento di distorsione («ritaratura») introdotto a un tempo τ è indipendente dagli effetti di qualsiasi distorsione introdotta prima o dopo il tempo τ.

(*) Presentata nella seduta dell'8 maggio 1965.

(1) Occorre qui mettere in guardia sul fatto, già più volte osservato [3], [4], che, al fine di ottenere un accordo con l'esperienza per l'equazione (1) e per i suoi diversi integrali, l'aspetto fisico-meccanico delle fibre elementari deve assumere un carattere fittizio. Questo fatto è conseguenza della eccessiva schematizzazione adottata per rappresentare l'intima composizione del conglomerato cementizio, e ad esso si potrebbe ovviare con l'adozione di modelli reologici più complessi ma di meno facile impiego.

(2) Si pensi ad esempio alla precompressione delle pavimentazioni stradali o aeroportuali mediante martinetti piatti, o alla introduzione di spinte addizionali correttive nelle strutture ad arco mediante distorsione applicata alla sezione di chiave.

L'applicazione del principio a un caso concreto è schematizzata dalla fig. 1. Sia *a* la curva di rilassamento dello sforzo S di una provetta A sottoposta alla età t_1 allo sforzo S_1 mediante la introduzione di una distorsione costante $\bar{\varepsilon}_1$, ed S_2 sia lo sforzo residuo al tempo t_2. Sia *b* la curva di rilassamento di una provetta B, identica alla precedente e conservata in identiche condizioni, soggetta al tempo t_2 a una distorsione $\bar{\varepsilon}_3$ con sforzo S_3 ($S_3 = S_1 - S_2$). Sia *c* infine la curva di rilassamento di una provetta C, identica e identicamente conservata, soggetta fino a t_2 al medesimo regime di sforzo della provetta A, e per la quale viene effettuata in t_2 una ritaratura della tensione, che riporta lo sforzo al valore iniziale S_1, mediante una distorsione $\bar{\varepsilon}_3$ identica a quella applicata a B. Si afferma che la curva *c* può ottenersi come somma delle ordinate relative alla curva *a* e alla curva *b*.

Mostriamo ora che questo principio è una diretta conseguenza della adozione della equazione reologica (1) per lo studio dei fenomeni viscoelastici del conglomerato cementizio, e che pertanto esso può essere giustificato sia per

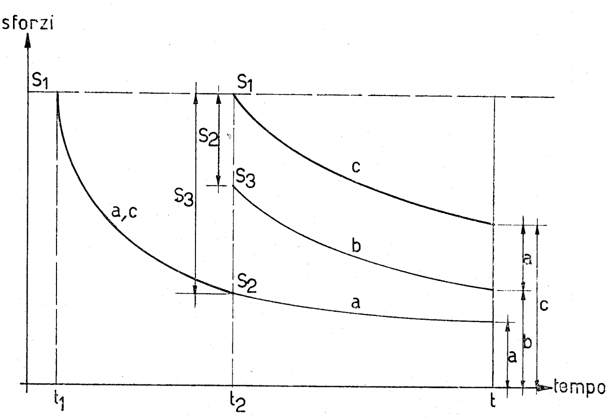

Fig. 1.

via analitica, attraverso la integrazione della (1), sia attraverso considerazioni intuitive basate sulle proprietà fisiche dello schema reologico da cui la (1) è stata dedotta.

Esponiamo qui inizialmente il ragionamento fisico. Si consideri il conglomerato costituito dalla associazione in serie di fibre elementari parallele del tipo descritto all'inizio: risulta allora possibile studiarne il comportamento in una struttura omogenea [3] complessa attraverso l'esame di una sola fibra elementare, poiché il conglomerato nel suo insieme rispecchia il comportamento reologico della fibra stessa.

Pertanto, al fine di giustificare la relazione enunciata per le curve *a*, *b*, *c*, di fig. 1, ammetteremo che le tre provette di conglomerato A, B, C, possano essere assimilate ad altrettanti solidi ideali, costituiti ciascuno da un solo ele-

(3) L'omogenità cui si fa cenno è di tipo statistico ed è relativa alla struttura nel suo insieme e non alla struttura interna del conglomerato.

mento del tipo parallelo, di cui la frazione elastica ha sezione A′ e modulo E′, e la frazione viscoelastica ha sezione $\bar{A}$ e modulo E. (Indicheremo con A la sezione omogeneizzata al modulo E). Le sezioni terminali di questi solidi ideali sono vincolate a rimanere piane. Sulla base di tale schematizzazione, potremo impostare il ragionamento seguente.

La distorsione iniziale $\bar{\mathscr{E}}_1$ introdotta al tempo t_1 sulle provette A e C produce su entrambe una tensione S_1 che si ripartisce sulle due frazioni ideali ($\bar{A}$ e A′) di ciascuna provetta in funzione delle rispettive rigidezze elastiche istantanee. La quota di sforzo assorbita dall'anima elastica A′ si conserva invariata nel tempo, mentre la quota assorbita dalla frazione viscoelastica subisce una diminuzione per rilassamento, identica a quella che si avrebbe in un solido caratterizzato da una legge di fluage lineare semplificata, data la possibilità di estendere al caso in esame la legge di isomorfismo [5]. Al tempo t_2 lo sforzo totale agente su entrambe le provette A e C si riduce al valore S_2, mentre la quota di sforzo assorbita dall'anima elastica aumenta in valore percentuale rispetto alla situazione iniziale.

Sottoponiamo ora la provetta C a una ritaratura della sua tensione introducendo uno sforzo S_3 ($S_1 = S_2 + S_3$) mediante una ulteriore distorsione $\bar{\mathscr{E}}_3$. È facile prevedere che la evoluzione dello sforzo S_3, all'interno della provetta C, si svolgerà indipendentemente dalla evoluzione di S_2, seguendo una curva di rilassamento pari a quella fornita dalla provetta B, originariamente scarica, e soggetta in t_2 alla stessa distorsione $\bar{\mathscr{E}}_3$ con sforzo S_3. Infatti la $\bar{\mathscr{E}}_3$ produce, tanto in C quanto in B, uno stesso incremento di tensione S_3 (pari al prodotto della rigidezza elastica istantanea complessiva della fibra per l'entità della distorsione), il quale si ripartisce allo stesso modo, sia in C che in B, sulle due frazioni ideali di ciascuna provetta, essendo le singole quote di sforzo proporzionali alle rigidezze elastiche istantanee al tempo t_2 (identiche in C e in B) delle due frazioni stesse. Pertanto il rilassamento della frazione di S_3 che interessa l'elemento viscoelastico non può che avvenire in modo identico, sia per la provetta C sia per la provetta B.

D'altro lato invece, lo sforzo S_2 nella provetta C continuerà ad evolvere, per tempi successivi a t_2, indipendentemente dalla presenza di S_3 e secondo una curva identica a quella fornita dalla provetta A, poiché la introduzione della distorsione $\bar{\mathscr{E}}_3$ in C, non ha alterato la distribuzione di S_2.

Ne deriva che la curva c di rilassamento dello sforzo $S_1 = S_2 + S_3$ della provetta C potrà essere ottenuta dalla somma delle curve di rilassamento delle provette A e B. Ossia:

$$a + b = c.$$

* * *

Le considerazioni intuitive qui accennate trovano immediata conferma nelle deduzioni analitiche dalla equazione (1) che riportiamo nel seguito.

Per il solido ideale schematizzato in precedenza la espressione generale del rilassamento della tensione S_τ, introdotta mediante distorsione al tempo τ, si ottiene dalla integrazione della (1) ed ha la forma [5]:

$$S(t) = S_\tau \left(1 - \frac{\bar{A}}{A}\right) + S_\tau \frac{\bar{A}}{A} e^{-[\bar{\varepsilon}_0(t) - \bar{\varepsilon}_0(\tau)]} \tag{2}$$

dove:

$S_\tau \left(1 - \frac{\bar{A}}{A}\right)$ = quota costante di tensione competente alla parte elastica della fibra.

$S_\tau \frac{\bar{A}}{A}$ = quota di tensione competente alla parte viscoelastica della fibra prima dell'inizio del rilassamento.

Per la provetta A essendo $\tau = t_1$, $S_\tau = S_1$ la equazione della curva *a* assume la forma:

$$S(t) = S_1 \left(1 - \frac{\bar{A}}{A}\right) + S_1 \frac{\bar{A}}{A} e^{-[\bar{\varepsilon}_0(t) - \bar{\varepsilon}_0(t_1)]} \tag{a}$$

e lo sforzo residuo al tempo t_2 è:

$$S_2 = S_1 \left(1 - \frac{\bar{A}}{A}\right) + S_1 \frac{\bar{A}}{A} e^{-[\bar{\varepsilon}_0(t_2) - \bar{\varepsilon}_0(t_1)]} .$$

Per la provetta B essendo $\tau = t_2$, $S_\tau = S_3$ la equazione della curva *b* assume la forma:

$$S(t) = S_3 \left(1 - \frac{\bar{A}}{A}\right) + S_3 \frac{\bar{A}}{A} e^{-[\bar{\varepsilon}_0(t) - \bar{\varepsilon}_0(t_2)]} . \tag{b}$$

Per la provetta C essendo:

$\tau = t_2$; $S_1 \frac{\bar{A}}{A} e^{-[\bar{\varepsilon}_0(t_2) - \bar{\varepsilon}_0(t_1)]} + S_3 \frac{\bar{A}}{A}$ = sforzo agente sulla parte viscoelastica per $t = t_2 +$

$S_1 \left(1 - \frac{\bar{A}}{A}\right) + S_3 \left(1 - \frac{\bar{A}}{A}\right)$ = sforzo agente sulla parte elastica per $t = t_2 +$

la equazione del secondo tratto (successivo alla ritaratura) della curva *c* assume la forma:

$$S(t) = (S_1 + S_3)\left(1 - \frac{\bar{A}}{A}\right) + \frac{\bar{A}}{A}\left(S_1 e^{-[\bar{\varepsilon}_0(t_2) - \bar{\varepsilon}_0(t_1)]} + S_3\right) e^{-[\bar{\varepsilon}_0(t) - \bar{\varepsilon}_0(t_2)]}. \tag{c}$$

Si verifica immediatamente che si ha:

$$(a) + (b) = (c).$$

* * *

A complemento di quanto siamo venuti affermando osserviamo che:

a) i ragionamenti svolti sono validi qualunque sia la legge assunta per la rappresentazione del fluage specifico $\bar{\varepsilon}_0$ della frazione viscoelastica del conglomerato;

b) l'enunciato del principio resta valido se si suppone che gli elementi collegati in parallelo, considerati per impostare la (1), siano associati in serie con elementi viscoelastici privi di elasticità ritardata.

c) dal principio enunciato discende immediatamente che la pendenza iniziale della curva di rilassamento di una tensione ottenuta al tempo t mediante ritaratura, è minore della pendenza della curva di rilassamento della stessa tensione introdotta per la prima volta al tempo t. Si deduce inoltre che entrambe queste curve non si possono costruire per trasporto affine, lungo l'asse delle ordinate, della curva di rilassamento di una identica tensione, introdotta all'origine dei tempi, e non ritarata successivamente. Le pendenze iniziali risultano infatti maggiori di quelle che così si otterrebbero.

A questo risultato, confermato dalla esperienza (4), non si giunge applicando la teoria semplificata del fluage lineare (corpo costituito da un'unica frazione viscoelastica) per la quale vale invece il trasporto affine.

* * *

Come conclusione alla trattazione testè svolta, intendiamo porre ancora l'accento sull'origine teorica del principio proposto, che risulta essere una immediata conseguenza della equazione reologica (1). Mancano oggi sufficienti dati per un suo preciso controllo sperimentale. Pertanto ci auspichiamo che vengano intraprese numerose esperienze di rilassamento in strutture di conglomerato soggette a distorsioni costanti. Qualora si ottenesse, in via sperimentale, la conferma del principio enunciato, è probabile che, come già per il principio di McHenry, altre rappresentazioni reologiche, anche più perfezionate di quella che ha dato origine alla (1), possano trovarsi in accordo con il principio stesso. L'accordo con questo principio di sovrapponibilità degli sforzi verrebbe allora a costituire, evidentemente, un ulteriore criterio per il controllo della validità delle diverse possibili schematizzazioni reologiche del conglomerato.

BIBLIOGRAFIA.

[1] D. MCHENRY, *A new aspect in creep of concrete and its application to design*, « Proc. Amer. Soc. Testing. Materials », 1943.

[2] F. LEVI, *Interpretazione teorica del principio di reversibilità di McHenry*, « Accademia dei Lincei », Roma 1961.

[3] F. LEVI, *Représentation des propriétés rhéologiques du béton durci*. « Hommage au prof. Campus », Liège 1964.

[4] M. A. CHIORINO, Contribution to the article: *The effect of the elastic modulus of the aggregate on the el. modulus creep and creep recovery of concrete*, U. J. Counto. « Mag. of Concrete Research », London 1965.

[5] F. LEVI–G. PIZZETTI, *Fluage, Plasticité, Précontrainte*, Dunod, Paris 1951.

[6] T. C. HANSEN, *Creep and Stress Relaxation of Concrete*, Cement and Concrete Institute – Proc. n° 31, Stockholm 1960.

[7] G. CORONA, *Ricerche sperimentali sull'influenza del tempo sul regime statico di archi in calcestruzzo*, « Ricerca Scientifica », n° 6 (1957).

(4) Questo fenomeno, noto come « ripresa » della caduta di tensione, si riscontra nelle curve di rilassamento ottenute da diversi sperimentatori [6], [7], ed è ampiamente constatato nella pratica.