Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

G. Ferrarese

Sulla dinamica del corpo rigido

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.5, p. 649–654.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_5_649_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Meccanica. — *Sulla dinamica del corpo rigido* (*). Nota di G. FERRARESE, presentata (**) dal Corrisp. C. CATTANEO.

Una espressione della velocità angolare già introdotta in cinematica delle deformazioni finite (1), ed alcune proprietà dei rotori (n. 1), consentono di porre le equazioni di moto di un corpo rigido con un punto fisso in una forma lagrangiana più compatta rispetto a quella usuale che utilizza gli angoli di *Eulero*. La maggiore uniformità dei parametri di posizione impiegati (le componenti di un vettore $\boldsymbol{q}$) attribuisce infatti un aspetto più simmetrico alle equazioni del moto, che costituiscono un sistema normale del secondo ordine con coefficienti dei termini quadratici nelle $\dot{q}^h$ *razionali* nelle q^h.

Viene poi stabilito un semplice legame tra i momenti cinetici coniugati alle variabili q^h e il momento delle quantità di moto.

1. PREMESSE: UNA PROPRIETÀ CARATTERISTICA DEI ROTORI. –. Siano: $\mathcal{C} \equiv O\, \boldsymbol{c}_1\, \boldsymbol{c}_2\, \boldsymbol{c}_3$ una terna cartesiana di riferimento prefissata; $\mathfrak{R}$ un rotore, cioè l'omografia corrispondente ad una generica rotazione attorno ad O, di versore $\boldsymbol{u}$ e ampiezza φ $(0 \leq \varphi < \pi)$.

È noto che i coefficienti (rispetto a $\mathcal{C}$) del rotore $\mathfrak{R}$ possono essere espressi *razionalmente* mediante il vettore $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ – *vettore caratteristico* di $\mathfrak{R}$ –. Precisamente si ha, per il trasformato di un qualunque vettore $\boldsymbol{v}$, la seguente formula di *De Finetti* (2):

$$\mathfrak{R}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \frac{2}{1 + \boldsymbol{q}^2}\, \boldsymbol{q} \wedge (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{v}) \tag{1}$$

che stabilisce una corrispondenza biunivoca (3) tra l'insieme dei rotori e l'ordinario spazio vettoriale a tre dimensioni (4).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta dell'8 maggio 1965.

(1) Cfr. G. FERRARESE, *Sulla velocità angolare nei moti rigidi e la rotazione locale nelle deformazioni finite*, « Rend. di Matem. » (1–2), *18*, 171 (1959).

(2) Cfr. B. DE FINETTI, *Le isomerie vettoriali e una formula di Cisotti per gli spostamenti rigidi*, « Rend. Ist. Lombardo », *67*, 82 (1934) e, più recentemente, F. I. FEDOROV, « Doklady Belarusskaja Akademija Nauk », Minsk (USSR), *2*, 408 (1958).

(3) Se due vettori $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{q}'$ individuano lo stesso rotore deve essere, per ogni $\boldsymbol{v}$,

$$\frac{1}{1 + \boldsymbol{q}^2}\, \boldsymbol{q} \wedge (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{v}) = \frac{1}{1 + \boldsymbol{q}'^2}\, \boldsymbol{q}' \wedge (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{q}' \wedge \boldsymbol{v}).$$

Di qui, per $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{q}$, si ricava $0 = (\boldsymbol{q}' \wedge \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{q}' \wedge (\boldsymbol{q}' \wedge \boldsymbol{q})$, cioè $\boldsymbol{q}' \wedge \boldsymbol{q} = 0$, quindi $\boldsymbol{q}' = \lambda \boldsymbol{q}$. Con

(*per la nota 4 ved. pag. seguente*).

Sulla base della (1) possiamo facilmente stabilire la seguente *proprietà caratteristica dei rotori*: Data una omografia γ, se esiste un vettore $\boldsymbol{q}$ tale che sia

$$\gamma\boldsymbol{v} - \boldsymbol{q}\wedge\gamma\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{v} + \boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{v} \tag{2}$$

per ogni scelta del vettore $\boldsymbol{v}$, γ è necessariamente un rotore e $\boldsymbol{q}$ il suo vettore caratteristico.

Per provare l'asserto basta far vedere che la (2) è univocamente risolubile rispetto a $\gamma\boldsymbol{v}$ e dà luogo ad una formula del tipo (1). Infatti, aggiunto il vettore $\boldsymbol{v}$ ai due membri della (2), e posto per brevità $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{v}$, essa si scrive

$$\boldsymbol{w} - \boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{w} = 2\,\boldsymbol{v}. \tag{3}$$

Di qui, risolvendo rispetto a $\boldsymbol{w}$, si ottiene in modo univoco [5]

$$\boldsymbol{w} = \frac{2}{1+\boldsymbol{q}^2}\,(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{v} + \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}\boldsymbol{q}), \tag{3'}$$

ciò che, tenuto conto della posizione fatta e della (1), prova l'asserto.

La (2) permette di riconoscere che: *a*) per ogni rotore $\mathfrak{R}$ sussiste l'identità [6]

$$\mathfrak{R}\,(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{v}) \equiv \boldsymbol{v} + \boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{v}; \tag{4}$$

b) il prodotto $\mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}'\,\mathfrak{R}$ di due rotori $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{R}'$, di vettori caratteristici $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{q}'$ rispettivamente, ha come vettore caratteristico [7]

$$\boldsymbol{q}'' = \frac{\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}' + \boldsymbol{q}'\wedge\boldsymbol{q}}{1 - \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}'}. \tag{5}$$

Si riferisca infatti la (2) ad $\mathfrak{R}'$, indi si ponga $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}'$. Si ottiene successivamente, tenuto conto della (4) per $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{q}'$ e della identità $\mathfrak{R}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$: $\mathfrak{R}'\,(\mathfrak{R}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}' + \boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{q}') = \mathfrak{R}''\,(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{q}') = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}' + \boldsymbol{q}'\wedge\boldsymbol{q}$, da cui

$$\boldsymbol{q}'' = \lambda\,(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}' + \boldsymbol{q}'\wedge\boldsymbol{q}) \tag{6}$$

questa limitazione per $\boldsymbol{q}'$ la precedente identità si scrive

$$\left(\frac{1}{1+\boldsymbol{q}^2} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2\boldsymbol{q}^2}\right)\boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{v} + \left(\frac{1}{1+\boldsymbol{q}^2} - \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2\boldsymbol{q}^2}\right)\boldsymbol{q}\wedge(\boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{v}) = 0$$

e, dovendo essere verificata per ogni $\boldsymbol{v}$, implica $\frac{1}{1+\boldsymbol{q}^2} = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2\boldsymbol{q}^2}$, $\frac{1}{1+\boldsymbol{q}^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2\boldsymbol{q}^2}$, cioè nell'ordine $\lambda^2 = 1$, $\lambda = 1$, quindi la coincidenza di $\boldsymbol{q}'$ con $\boldsymbol{q}$.

(4) Le rotazioni di ampiezza π e versore qualunque $\boldsymbol{u}$ corrispondono al caso limite $\boldsymbol{q} = q\boldsymbol{u}$ per $q \to \infty$.

(5) Cfr. ad esempio A. SIGNORINI, *Lezioni di fisica matematica dell'anno 1952-53*, 2ª ed. Roma, Veschi, p. 16. Direttamente si osservi che, posto $\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{q} + \nu\boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{v}$, l'equazione in esame si scrive $\lambda\boldsymbol{v} + \mu\boldsymbol{q} + \nu\boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{v} = (2 - \nu\boldsymbol{q}^2)\,\boldsymbol{v} + \nu\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}\boldsymbol{q} + \lambda\boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{v}$, da cui l'espressione di $\boldsymbol{w}$.

(6) Essendo $\boldsymbol{q} = \mathfrak{R}\boldsymbol{q}$ si ha successivamente, tenuto conto che un rotore coincide col suo complementare, $\boldsymbol{q}\wedge\mathfrak{R}\boldsymbol{v} = \mathfrak{R}\boldsymbol{q}\wedge\mathfrak{R}\boldsymbol{v} = \mathfrak{R}\,(\boldsymbol{q}\wedge\boldsymbol{v})$.

(7) La (5) già figura nel lavoro citato in (2), p. 89, ma qui viene ritrovata più rapidamente.

ove λ è un parametro da determinare. D'altra parte la (2), riferita ad $\mathcal{R}''$ per $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{q}$, dà luogo all'identità

$$\boldsymbol{q}'' \wedge (\boldsymbol{q} + \mathcal{R}' \boldsymbol{q}) = \mathcal{R}' \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q} .$$

Di qui, tenuto conto della (6) e dell'espressione di $\mathcal{R}'\boldsymbol{q}$ che risulta dalla (1):

$$\mathcal{R}' \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q} = \frac{2}{1 + \boldsymbol{q}'^2} \boldsymbol{q}' \wedge (\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}' \wedge \boldsymbol{q}) ;$$

moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{q}' \wedge \boldsymbol{q}$, si trae in modo univoco $\lambda = \dfrac{1}{1 - \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}'}$, ciò che prova l'asserto.

Nel seguito è indicata con ρ l'omografia

$$\rho \equiv \frac{2}{1 + \boldsymbol{q}^2} (1 + \boldsymbol{q} \wedge) \tag{7}$$

e con ρ la sua *coniugata* (che si ottiene scambiando $\boldsymbol{q}$ con $-\boldsymbol{q}$):

$$\rho \equiv \frac{2}{1 + \boldsymbol{q}^2} (1 - \boldsymbol{q} \wedge) . \tag{8}$$

In base alle (3) e (3') l'inversa di ρ, ρ^{-1} si esprime con la formula omografica

$$2 \rho^{-1} \equiv 1 - \boldsymbol{q} \wedge + \boldsymbol{q} (\boldsymbol{q} \cdot) . \tag{7'}$$

2. CARATTERISTICHE DINAMICHE DI UN CORPO RIGIDO CON UN PUNTO FISSO IN FUNZIONE DI UN VETTORE POSIZIONALE $\boldsymbol{q}$. – Siano: S un sistema rigido con un punto fisso $\Omega \equiv O$, in moto rispetto alla terna di riferimento $\mathcal{T} \equiv O\, \boldsymbol{c}_1\, \boldsymbol{c}_2\, \boldsymbol{c}_3$; $\mathcal{T}' \equiv \Omega\, \boldsymbol{i}_1\, \boldsymbol{i}_2\, \boldsymbol{i}_3$ una terna solidale ad S che, per semplicità, si suppone coincidente con la terna principale d'inerzia relativa al punto Ω; σ l'omografia che, rispetto alla terna $\mathcal{T}$, ha per coefficienti (8)

$$\sigma \equiv \left\| \begin{matrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{matrix} \right\|$$

(A_h, $h = 1, 2, 3$, momenti principali d'inerzia per il punto Ω); $\mathcal{R}(t)$ il rotore che porta $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}'$:

$$\mathcal{R}\boldsymbol{c}_h = \boldsymbol{i}_h \qquad (h = 1, 2, 3);$$

$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{u} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ il vettore caratteristico di $\mathcal{R}$.

Le componenti q^h di $\boldsymbol{q}$ secondo la terna fissa $\mathcal{T}$, essendo atte a definire $\mathcal{R}$, quindi la posizione di S rispetto a $\mathcal{T}$, possono assumersi come *coordinate lagrangiane* di S, in luogo degli abituali angoli di *Eulero*. L'uso di tali coordinate consente *espressioni sintetiche* per la velocità angolare e per il momento delle quantità di moto, quindi per l'energia cinetica.

(8) I coefficienti di una omografia, così come le componenti di un vettore, si intendono sempre riferiti alla terna fissa $\mathcal{T}$.

Per quanto riguarda la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(t)$ sussiste la seguente formula:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{1+\boldsymbol{q}^2}(\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{q}\wedge\dot{\boldsymbol{q}}) \equiv \rho\dot{\boldsymbol{q}} \tag{9}$$

(il punto indica derivazione rispetto al tempo), da cui, avuto riguardo alla (4),

$$\mathcal{R}^{-1}\boldsymbol{\omega} = \frac{2}{1+\boldsymbol{q}^2}(\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{q}\wedge\dot{\boldsymbol{q}}) \equiv \bar{\rho}\dot{\boldsymbol{q}}\,. \tag{9'}$$

La (9) si presta ad esprimere le componenti della velocità angolare secondo la terna fissa in funzione della q^h e $\dot{q}^h$. La (9′) invece, posto che $\mathcal{R}^{-1}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{c}_h = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{i}_h$, si presta ad esprimere, in funzione delle stesse variabili, le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ secondo la terna solidale.

Per quanto concerne il momento delle quantità di moto $\mathbf{K}$ (rispetto al punto fisso O), da $\mathcal{R}^{-1}\mathbf{K} = \sigma\mathcal{R}^{-1}\boldsymbol{\omega}$ segue

$$\mathcal{R}^{-1}\mathbf{K} = \sigma\bar{\rho}\dot{\boldsymbol{q}}\,; \tag{10}$$

quindi per l'energia cinetica, $\mathrm{T} \equiv \frac{1}{2}\mathcal{R}^{-1}\mathbf{K}\cdot\mathcal{R}^{-1}\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} \equiv \frac{1}{2}p_h\dot{q}^h \tag{11}$$

(somma sottintesa rispetto ad h), ove si è posto

$$\boldsymbol{p} = \rho\sigma\bar{\rho}\dot{\boldsymbol{q}}\,. \tag{12}$$

Le componenti di $\boldsymbol{p}$ secondo la terna fissa $\mathcal{T}$ dànno i momenti cinetici $p_h \equiv \frac{\partial\mathrm{T}(q/\dot{q})}{\partial\dot{q}^h}$ $(h = 1, 2, 3)$, sì che la (12) fornisce il legame tra questi e le velocità lagrangiane $\dot{q}^h$. Esplicitamente sarà $p_h = a_{hk}\dot{q}^k$ (somma sottintesa rispetto a k), ove i coefficienti $a_{hk} = a_{kh} \equiv \boldsymbol{c}_h\cdot\rho\sigma\bar{\rho}\boldsymbol{c}_k$ sono *funzioni razionali delle* q^h:

$$\left\{\begin{aligned} a_{hh} &= \frac{4}{(1+\boldsymbol{q}^2)^2}[\mathrm{A}_h + \mathrm{A}_{h+1}(q^{h+2})^2 + \mathrm{A}_{h+2}(q^{h+1})^2] \\ a_{hh+1} &= \frac{4}{(1+\boldsymbol{q}^2)^2}[(\mathrm{A}_h - \mathrm{A}_{h+1})q^{h+2} - \mathrm{A}_{h+2}q^h q^{h+1}] \quad (h = 1, 2, 3). \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Inversamente si avrà

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \bar{\rho}^{-1}\sigma^{-1}\rho^{-1}\boldsymbol{p}\,, \tag{12'}$$

ovvero $\dot{q}^h = a^{hk}p_k$, ove i coefficienti $a^{hk} \equiv \boldsymbol{c}_h\cdot\bar{\rho}^{-1}\sigma^{-1}\rho^{-1}\boldsymbol{c}_k$, reciproci degli a_{hk}, sono *polinomi di quarto grado* nelle q^h:

$$\left\{\begin{aligned} 4a^{hh} &= \frac{[1+(q^h)^2]^2}{\mathrm{A}_h} + \frac{(q^{h+2}-q^h q^{h+1})^2}{\mathrm{A}_{h+1}} + \frac{(q^{h+1}+q^h q^{h+2})^2}{\mathrm{A}_{h+2}} \\ 4a^{hh+1} &= \frac{[1+(q^h)^2](q^{h+2}+q^h q^{h+1})}{\mathrm{A}_h} - \frac{[1+(q^{h+1})^2](q^{h+2}-q^h q^{h+1})}{\mathrm{A}_{h+1}} - \\ &\quad - \frac{(q^{h+1}+q^h q^{h+2})(q^h - q^{h+1}q^{h+2})}{\mathrm{A}_{h+2}} \qquad (h = 1, 2, 3)\,. \end{aligned}\right. \tag{13'}$$

La (12) fornisce un legame significativo tra $\boldsymbol{p}$ e $\mathbf{K}$. Precisamente, avuto riguardo alla (10) e all'identità $\rho\mathcal{R}^{-1} \equiv \mathcal{R}^{-1}\rho \equiv \bar{\rho}$ che si desume dalla (4), si ha:

$$\boldsymbol{p} = \frac{2}{1+\boldsymbol{q}^2}(\mathbf{K} - \boldsymbol{q} \wedge \mathbf{K}) \equiv \bar{\rho}\mathbf{K}. \tag{14}$$

La (14), come già la (9) per ω, precisa il significato cinematico di $\boldsymbol{p}$: *se ad un dato istante* $\mathcal{C}$ *è sovrapposta a* $\mathcal{C}'$, *in quell'istante* è $\boldsymbol{p} = 2\mathbf{K}$.

Infine, indicate con M_h $(h = 1, 2, 3)$ le componenti secondo la terna fissa del momento della sollecitazione attiva $\mathbf{M}$ (rispetto ad O), il lavoro elementare corrispondente si scrive, avuto riguardo alla (9),

$$dL \equiv \mathbf{M}\cdot\omega\, dt = \frac{2}{1+\boldsymbol{q}^2}(\mathbf{M} - \boldsymbol{q}\wedge\mathbf{M})\cdot\dot{\boldsymbol{q}}\, dt = F_h\, dq^h, \tag{15}$$

ove le quantità F_h sono le componenti secondo la terna $\mathcal{C}$ del vettore

$$\mathbf{F} = \frac{2}{1+\boldsymbol{q}^2}(\mathbf{M} - \boldsymbol{q}\wedge\mathbf{M}) \equiv \bar{\rho}\mathbf{M}. \tag{16}$$

3. EQUAZIONI DI MOTO. – Si hanno così tutti gli elementi per esplicitare le equazioni di moto di un solido con un punto fisso senza attrito nelle variabili prescelte q^h. Basta partire dalla forma lagrangiana

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial T}{\partial q^h} = F_h \qquad (h = 1, 2, 3), \tag{17}$$

ove $T \equiv \frac{1}{2} a_{hk}\dot{q}^h\dot{q}^k$ e le a_{hk} ed F_h sono definite dalle (13) e (16) rispettivamente; ovvero dal teorema del momento delle quantità di moto utilizzando le (12) e (14).

Più rapidamente, posto che nella varietà riemanniana V_3 di coordinate locali (q^h) e metrica $ds^2 = 2T\, dt^2 \equiv a_{hk}(q)\, dq^h dq^k$ le equazioni (17) assumono l'aspetto tipicamente newtoniano [9]

$$\frac{Dv_h}{dt} = F_h \qquad (h = 1, 2, 3) \tag{17'}$$

(D simbolo di differenziazione assoluta; $v_h = p_h = a_{hk}\dot{q}^k$), si avrà

$$\ddot{q}^h = a^{hk}[F_k - (rs, k)\dot{q}^r\dot{q}^s], \tag{17''}$$

ove i coefficienti $(rs, k) \equiv \frac{1}{2}(\partial_r a_{sk} + \partial_s a_{kr} - \partial_k a_{rs})$, $\left(\partial_r \equiv \frac{\partial}{\partial q^r}\right)$ sono, come risulta dalla (13), *funzioni razionali* delle q^h.

Dalla (17') segue che le traiettorie dinamiche sono *geodetiche* di V_3 se e solo se si ha $\mathbf{F} = \lambda\boldsymbol{p}$ ovvero, come risulta dal confronto delle (14) e (16), $\mathbf{M} = \lambda\mathbf{K}$; quindi, avuto riguardo al teorema del momento delle quantità di moto, *nel solo caso che* $\mathbf{M}$ *abbia direzione invariabile* rispetto a $\mathcal{C}$ e sia $\mathbf{K}_0 // \mathbf{M}_0$.

(9) Cfr. J. L. SYNGE, *On the geometry of dynamics*, « Phil. Transactions, » *226*, s.a. (1927).

Se poi le F_h derivano da un potenziale $\mathcal{V}(q)$ (10), le (17″) possono essere sostituite dal sistema hamiltoniano

$$\dot{q}^h = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h} \quad , \quad \dot{p}_h = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^h} \qquad (h = 1, 2, 3) \tag{18}$$

ove la funzione $\mathcal{H}(q/p)$, energia totale del sistema, è così definita a partire dalla (13′):

$$\mathcal{H}(q/p) \equiv \frac{1}{2} a^{hk}(q)\, p_h\, p_k - \mathcal{V}(q)\,. \tag{19}$$

Si noti che *i secondi membri delle* (18) *sono polinomi* nelle q e p, almeno se a tale condizione si uniforma anche la funzione potenziale.

La forma lagrangiana (17″) delle equazioni di moto, nonché quella hamiltoniana (18), potrà naturalmente interessare solo quei problemi dinamici che, per la dipendenza del momento delle forze dall'orientamento del corpo, non possono essere trattati con le sole equazioni stereodinamiche di *Eulero*.

Per quanto riguarda infine il semplice legame invertibile (14), tra $\boldsymbol{p}$ e il momento delle quantità di moto $\mathbf{K}$, esso potrebbe far pensare alla possibilità di introdurre, in luogo delle q^h, (11) altre tre variabili posizionali Q^h in modo che la trasformazione $(q^h, p_h) \longleftrightarrow (Q^h, K_h)$ (K_h componenti di $\mathbf{K}$ secondo la terna fissa) sia *canonica*. Tale possibilità è peraltro da escludere, come si può riconoscere con semplici considerazioni che qui omettiamo.

(10) Per un solido pesante, indicate con x_0, y_0, z_0 le *invariabili* coordinate del baricentro rispetto alla terna solidale $\mathcal{T}$ e supposto $\boldsymbol{c}_3$ orientato come la verticale discendente, si ha $\mathcal{V}(q) \equiv \mathfrak{M} g z_G = \mathfrak{M} g\, \boldsymbol{c}_3 \cdot \mathcal{R}(x_0 \boldsymbol{c}_1 + y_0 \boldsymbol{c}_2 + z_0 \boldsymbol{c}_3)$, ovvero esplicitamente, avuto riguardo alla (1),

$$\mathcal{V}(q) = -2 \frac{\mathfrak{M} g}{1 + \boldsymbol{q}^2} [x_0 (q^2 - q^1 q^3) - y_0 (q^1 + q^2 q^3) + z_0 (q^1)^2 + z_0 (q^2)^2]\,.$$

(11) Si noti che una rotazione di vettore $\boldsymbol{q}'$ della terna di riferimento $\mathcal{T}$ implica, concordemente alla (5), una trasformazione $\boldsymbol{q} \longleftrightarrow \mathbf{Q}$ del tipo

$$\boldsymbol{q} = \frac{\mathbf{Q} + \boldsymbol{q}' + \mathbf{Q} \wedge \boldsymbol{q}'}{1 - \boldsymbol{q}' \cdot \mathbf{Q}} \Longleftrightarrow \mathbf{Q} = \frac{\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{q}'}{1 + \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}'}\,.$$

SUMMARY. — Equations of motion in lagrangian form are established for a rigid body with a fixed point, by using an expression of the angular velocity previously introduced by the Author in the kinematics of finite deformations. This form of the equations, in which the components of a vector $\boldsymbol{q}$ are used in describing the angular motion, instead of Eulerian angles, constitute a normal system of second order in which the coefficients of the quadratic terms in $\dot{q}^h$ are rational functions of q^h.

Moreover a simple relationship is given between the angular momentum and the momentum conjugate to $\boldsymbol{q}$.