Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Peter Dembowski

Sui gruppi di traslazioni d’un piano affine finito

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.5, p. 645–648.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_5_645_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Geometria. — *Sui gruppi di traslazioni d'un piano affine finito.* Nota di PETER DEMBOWSKI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

Sia A un piano affine arbitrario, avente n punti su ogni retta (n è cioè l'ordine di A), e sia T un qualunque gruppo di traslazioni di A. Va rilevato che non postuliamo che A sia un piano di traslazione, nel senso di André [1], e che T non è necessariamente il gruppo di tutte le traslazioni di A. Nella presente Nota, a complemento di un risultato di Gleason [3], stabiliremo varie proposizioni concernente il modo di operare di T su A. Troveremo, fra l'altro, una condizione sufficiente affinché n sia una potenza d'un numero primo (teor. 1). Il teor. 2 può servire per rettificare una dimostrazione difettosa di Piper [5]; questo A. ha però informato l'autore di possedere un'altra maniera più elegante per colmare tale lacuna.

Premettiamo alcune convenzioni terminologiche. I punti e le rette di A vengon qui rispettivamente denotati con lettere latine maiuscole e minuscole; le lettere minuscole in grassetto designano i fasci di rette parallele di A. Il sottogruppo delle traslazioni di T che lasciano fissa ogni retta di un fascio $\mathbf{p}$ è denotato con $T_{\mathbf{p}}$. Indichiamo con $h_1, \cdots, h_m$ ($m \geqq 1$) gli ordini fra loro diversi dei vari $T_{\mathbf{p}}$, e con s_i il numero dei fasci $\mathbf{p}$ tale che $|T_{\mathbf{p}}| = h_i$ ($i = 1, \cdots, m$). Infine, chiamiamo t il numero delle T-orbite di punti di A.

In virtù d'un risultato dell'autore ([2], Satz 2), abbiamo che

(1) *Il numero delle* T*-orbite di rette è* $n + t$.

Poiché T opera regolarmente sugli n^2 punti di A (e cioè soltanto l'identità lascia fisso un punto), così:

$$t\,|T| = n^2. \tag{2}$$

Il numero dei fasci di A essendo $n + 1$, si ha

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = n + 1 ; \tag{3}$$

contando poi le traslazioni in T, otteniamo

$$|T| = 1 + \sum_{i=1}^{m} (h_i - 1)\, s_i = \sum_{i=1}^{m} h_i\, s_i - n. \tag{4}$$

LEMMA 1. – *Se* $|T_{\mathbf{p}}| = h_i$, *il fascio* $\mathbf{p}$ *è decomposto in* $th_i\, n^{-1}$ *orbite di rette, ed ogni tale orbita consiste di* $n^2 (th_i)^{-1}$ *rette* ($i = 1, \cdots, m$).

Dimostrazione. – La retta x sia contenuta nell'orbita $\mathbf{x}$, sottinsieme del fascio $\mathbf{p}$ con $|T_{\mathbf{p}}| = h_i$. Allora $|T_i| = h_i\,|\mathbf{x}|$ e, a causa della (2), $|\mathbf{x}| = n^2 (th_i)^{-1}$. L'altra asserzione segue allora in quanto $|\mathbf{p}| = n$.

(*) Nella seduta dell'8 maggio 1965.

Osserviamo due conseguenze del Lemma 1:

$$th_i \equiv 0 \bmod n, \quad \text{ed} \quad n^2 \equiv 0 \bmod (th_i), \qquad i = 1, \cdots, m; \tag{5}$$

$$n(n+t) = t \sum_{i=1}^{m} h_i s_i . \tag{6}$$

Le (5) discendono in modo banale dal Lemma 1, mentre in virtù della (1) e del Lemma la (6) non fa che esprimere in due modi diversi il numero complessivo delle orbite di rette. Notiamo che la (6) può essere usata per dimostrare il resultato di Gleason secondo cui, supposto $m = 1 < |T|$, cioè se tutti i T_p hanno lo stesso ordine $h > 1$, il gruppo T dev'essere d'ordine n^2 ed A è un piano di traslazione; per i particolari rinviamo a [3].

LEMMA 2. – T *agisce transitivamente sopra (almeno) un'orbita di rette se, e soltanto se,* $|T| \geqq n$.

Dimostrazione. – È chiaro che T non può essere transitivo su nessun fascio se $|T| < n$. Inversamente, se $|T| \geqq n$, sia h il più piccolo degli h_i, $i = 1, \cdots, m$. Il Lemma 1 mostra ch'è sufficiente provare la $th = n$. Sappiamo da (5) che c'è un intero k tale che $th = kn$; dobbiamo mostrare che $k = 1$. Ora (2), (3), (4) e l'ipotesi $|T| \geqq n$ implicano successivamente:

$$n^2 (th)^{-1} = t\,|T|\,(th)^{-1} = h^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} h_i s_i - n\right) \geqq$$

$$\geqq h^{-1}\left(h \sum_{i=1}^{m} s_i - n\right) = n + 1 - h^{-1} n \geqq n + 1 - h^{-1}\,|T| = n + 1 - n^2 (th)^{-1}.$$

Dunque $2n^2 (th)^{-1} \geqq n + 1 > n$, onde $2n > th = kn$ e $k < 2$, eppertanto $k = 1$, q.e.d.

TEOREMA 1. – *Sia* $|T| \geqq n$ e $T \neq T_p$ *per ogni fascio* p. *Allora* n *e* t *sono potenze di uno stesso numero primo, ed* $n \geqq t$.

Dimostrazione. – La condizione $T \neq T_p$ mostra che T contiene traslazioni non–identiche in direzioni diversi. È ben noto che, in questo caso, il gruppo T è elementare abeliano; cfr. per esempio [3]. Allora $|T| = p^c$ per un certo primo p ed un intero $c > 1$. In virtù del Lemma 2, $|T| \geqq n$ implica che c'è un fascio p su cui T opera transitivamente. Dunque

$$p^c = |T| = |T_p|\,|p| = |T_p|\, n,$$

ed n è un divisore di p^c, quindi $n = p^e$ con $e \leqq c$. A causa della (2), anche t è una potenza di p, ed $n \geqq t$, q.e.d.

COROLLARIO. – *Se tutti i* T_p *sono* $\neq 1$, *allora* n *è una potenza d'un numero primo.*

Invero, $T_p \neq 1$ per ogni p implica $|T| > n$ (Ostrom [4] theor. 1, ha mostrato anche l'implicazione conversa) e $T_p \neq T$, dunque le condizioni del teor. 1 sono soddisfatte, onde l'asserto.

Ci occuperemo ora di una situazione simile, ma più complicata, di quella del risultato di Gleason sopra citato.

TEOREMA 2. – *Sia* $n^2 > |T| > |T_{\mathfrak{p}}|$ *per ogni fascio* $\mathfrak{p}$, *e supponiamo che tutti i* $T_{\mathfrak{p}} \neq 1$ *hanno uno stesso ordine* $h > 1$. *Allora il numero* s *dei fasci* $\mathfrak{p}$ *tale che* $T_{\mathfrak{p}} = 1$ *è divisibile per* h, *ed* $s > \sqrt{n}$ *oppure* $n = 2^e = |T|$ *ed* $h = s = 2$.

D i m o s t r a z i o n e. – Risulta $0 < s < n$ a causa del teorema di Gleason, e perché $T \neq T_{\mathfrak{p}}$ per ogni $\mathfrak{p}$. Inoltre, $|T| = p^c > h = p^d$ per un certo numero primo p e convenienti c, d. Ora le (2), (6) implicano le

$$n(n + n^2 p^{-c}) = n(n+t) = t \sum_{i=1}^{m} h_i s_i = t[s + (n+1-s)p^d] =$$
$$= n^2 p^{-c}[s + (n+1-s)p^d]$$

da cui, con un calcolo elementare, segue la

$$p^d(p^{c-d} - 1) = (n-s)(p^d - 1). \tag{7}$$

Ma p^d e $p^d - 1$ sono relativamente primi, sicché $p^d - 1$ divide $p^{c-d} - 1$. Dunque d è un divisore di c; poniamo $c = (k+1)d$, dove $k > 0$ perché $c > d$. Siccome $s > 0$, esiste un fascio $\mathfrak{p}$ con $T_{\mathfrak{p}} = 1$; e siccome T opera regolarmente sulle n rette di $\mathfrak{p}$, così $|T| = p^c$ dev'essere un divisore di n. Esiste pertanto un intero r tale che

$$n = rp^c = rp^{(k+1)d} = rh^{k+1}. \tag{8}$$

Le (7), (8) mostrano che n ed $n - s$ sono divisibili per $h = p^d$, ond'è $s \equiv 0 \bmod h$, e la prima asserzione è dimostrata. Posto

$$s = qp^d, \tag{9}$$

dalle (7), (8), (9) segue la

$$q = rp^{kd} - (p^{kd} - 1)/(p^d - 1). \tag{10}$$

Se $s \leqq \sqrt{n}$, a causa delle (8), (9) si ha

$$q \leqq \sqrt{r}\, p^{(k-1)d/2}. \tag{11}$$

Le (10), (11) forniscono la seguente disuguaglianza quadratica per $\sqrt{r}$:

$$r - \sqrt{r}\, p^{-(k+1)d/2} \leqq (p^{kd} - 1)\, p^{-kd}(p^d - 1)^{-1},$$

equivalente alla

$$\left[\sqrt{r} - \frac{1}{2} p^{-(k+1)d/2}\right]^2 \leqq \frac{1}{4} p^{-(k+1)d} + (p^{kd} - 1)\, p^{-kd}(p^d - 1)^{-1}.$$

Il secondo membro di questa disuguaglianza è

$$(p^d - 1)^{-1} - [(p^d - 1)^{-1} - (4p^d)^{-1}]\, p^{-kd} \leqq (p^d - 1)^{-1} \leqq 1,$$

perché $4p^d > p^d - 1$. Allora, siccome $k + 1 \geqq 2$, si ha

$$\sqrt{r} \leqq 1 + \frac{1}{2} p^{-(k+1)d/2} \leqq 1 + \frac{1}{2} p^{-d} \leqq 1 + \frac{1}{4} < \sqrt{2},$$

quindi $r < 2$. Ma r è per definizione un intero, sicché

$$r = 1. \tag{12}$$

Dalle (8), (12) e $|T| = p^c$ segue la $|T| = n$. Per stabilire che $p = 2 = h$, esprimiamo la (12) nelle (10), (11); otteniamo così:

$$1 \leqq p^{-(k+1)d/2} + (p^{kd} - 1) p^{-kd} (p^d - 1)^{-1} < p^{-(k+1)d/2} + (p^d - 1)^{-1} \leqq \frac{1}{2} + (p^d - 1)^{-1},$$

e quindi $(p^d - 1)^{-1} > \frac{1}{2}$ ossia $p^d < 3$. Dunque $h = p^d = 2$, e $d = 1$. Infine, avuto anche riguardo alla (12), la (10) mostra che $q = 1$, e quindi $s = 2$ a cagione della (9); ciò completa la dimostrazione del teor. 2.

Si potrebbe pensare che il secondo caso del teor. 2 non potesse avere luogo; in altre parole, che sia sempre $s > \sqrt{n}$. Il seguente esempio mostra però che ciò non è vero. Sia A il piano (pascaliano) sopra GF (2^e). Allora le traslazioni

$$(x, y) \rightarrow (x + u, y + u^2), \text{ per tutti gli } u \in \mathrm{GF}(2^e),$$

formano un gruppo T con $|T| = n = 2^e$ ed $s = h = 2$.

Bibliografia.

[1] J. André, *Ueber nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe*, «Math. Z.», *60*, 156–186 (1954).

[2] P. Dembowski, *Verallgemeinerungen von Transitivitätsklassen endlicher projektiver Ebenen*, «Math. Z.», *69*, 59–89 (1958).

[3] A. M. Gleason, *Finite Fano planes*, «Amer. J. Math.», *78*, 797–807 (1956).

[4] T. G. Ostrom, *Semi-Translation planes*, «Trans. Amer. Math. Soc.», *111*, 1–18 (1964).

[5] F. C. Piper, *Elations of finite projective planes*, «Math. Z.», *82*, 247–258 (1963).

Summary. — Let A be an affine plane of finite order n and T a group of translations, not all with the same direction, of A. If $|T| \geqq n$, then n is a power of a prime. If $|T| < n^2$ and the non-trivial subgroups with fixed directions all have the same order $h > 1$, then the number of directions for which T contains no non-trivial translations is either 2 or $> \sqrt{n}$; in the first case $|T| = n$ is a power of $h = 2$.