
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

FRANCESCO SUCCI

Realizzazione dell'isomorfismo di De Rham per le varietà relative

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 38 (1965), n.5, p. 639–644.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_5_639_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Topologia. — *Realizzazione dell'isomorfismo di De Rham per le varietà relative* (*). Nota di FRANCESCO SUCCI, presentata (**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

1. INTRODUZIONE. — In un precedente lavoro (cfr. [8]) ho stabilito il teorema di isomorfismo di De Rham nel caso relativo, riferendomi ad una varietà differenziabile reale di classe C^∞ , modulo un suo sottoinsieme chiuso soddisfacente ad ipotesi molto larghe.

Nel presente lavoro mostro che tale isomorfismo può realizzarsi, analogamente al caso assoluto, mediante integrazione, sui cicli differenziabili relativi, delle forme chiuse nulle sul sottoinsieme.

2. RICHIAMI E DEFINIZIONI. — Sia X una varietà differenziabile reale n -dimensionale, di classe C^∞ , e D un suo sottoinsieme chiuso il quale sia l'unione di un numero finito di varietà differenziabilmente immerse in X , anche in modo non regolare. Precisamente supponiamo che:

a) esistano k varietà differenziabili reali M_j di dimensione $n_j \leq n$, di classe C^s ($s \geq 2$), eventualmente dotate di bordo, ed altrettante applicazioni differenziabili, non necessariamente ovunque regolari, F_j di classe C^s :

$$(2.1) \quad F_j: M_j \longrightarrow X, \quad (j = 1, \dots, k),$$

in modo che risulti:

$$(2.2) \quad \bigcup_{j=1}^k F_j(M_j) = D;$$

b) l'insieme dei punti critici di F_j nei quali è: $\text{rango } F_j = r < n_j$, se non è vuoto o costituito da un numero finito di punti, sia localmente rappresentabile mediante applicazioni differenziabili regolari;

c) ogni punto $y \in D$ possieda in X un sistema fondamentale di intorni aperti, $\{V_i(y)\}$, tale che in ogni $V_i(y)$ esista una contrazione differenziabile $\Phi_i^{(y)}$, di classe C^s , di $V_i(y)$ al punto y :

$$(2.3) \quad \Phi_i^{(y)}: V_i(y) \times I \longrightarrow V_i(y)$$

(I = intervallo chiuso $[0, 1]$), con le proprietà:

(I) $\Phi_i^{(y)}$ contrae $D \cap V_i(y)$ in se stesso,

(II) $\Phi_i^{(y)}$ e $\frac{\partial \Phi_i^{(y)}}{\partial t}$ ($t \in I$) sono di classe C^∞ rispetto ad $x \in V_i(y)$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del C.N.R. per l'anno accademico 1964-65.

(**) Nella seduta dell'8 maggio 1965.

Ovviamente in ogni punto $x \in X - D$ esiste un sistema fondamentale di intorni aperti $V_i(x)$ contraibili ad x con una contrazione differenziabile di classe C^∞ . Nel seguito per « aperto V contraibile » intenderemo un qualunque aperto contraibile ad un suo punto se $V \cap D = \emptyset$, mentre se $V \cap D \neq \emptyset$ intenderemo che V sia contraibile ad un punto y di $D \cap V$ con una contrazione del tipo indicato in c), cioè che V sia uno dei $V_i(y)$.

Una forma differenziale α definita su X (o su un aperto di X) si dice *nulla su D* se sono nulle le sue immagini trasposte $F_j^* \alpha$ mediante le F_j , per $j = 1, \dots, k$.

Come in [8] indicheremo con Ω^p il prefascio su X che ad ogni aperto U associa l' $\mathbf{R}$ -modulo $\Omega^p(U, D)$ delle p -forme differenziali reali di U , di classe C^∞ , nulle su $D \cap U$; con $\mathring{\Omega}^p$ il sottoprefascio di Ω^p , che ad ogni U associa l' $\mathbf{R}$ -modulo $\mathring{\Omega}^p(U, D)$ delle p -forme chiuse di $\Omega^p(U, D)$; e con $\tilde{\Omega}^p, \mathring{\tilde{\Omega}}^p$ i corrispondenti fasci di germi.

Converrà ricordare i seguenti risultati di [8]:

A) In ogni aperto V contraibile di X , la successione:

$$(2.4) \quad 0 \longrightarrow \mathring{\Omega}^{p-1}(V, D) \xrightarrow{i} \Omega^{p-1}(V, D) \xrightarrow{d} \mathring{\Omega}^p(V, D) \longrightarrow 0$$

è esatta.

B) La successione esatta:

$$(2.5) \quad 0 \longrightarrow \mathring{\Omega}^0 = \mathbf{R}_{X-D} \xrightarrow{i} \mathring{\Omega}^0 \xrightarrow{d} \mathring{\Omega}^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathring{\Omega}^p \xrightarrow{d} \dots$$

è una risoluzione fina del fascio $\mathbf{R}_{X-D}$ dei reali concentrato su $X - D$.

3. LA RISOLUZIONE DEL FASCIO $\mathbf{R}_{X-D}$ MEDIANTE LE COCATENE SINGOLARI DIFFERENZIABILI RELATIVE. - Per un aperto U di X , con la struttura differenziabile indotta da quella di X , consideriamo l' $\mathbf{R}$ -modulo $C_p(U, D; \mathbf{R})$ quoziente dell' $\mathbf{R}$ -modulo delle p -catene (singolari, finite, a coefficienti reali) differenziabili C^r ($r \geq 1$) di U , rispetto al sottomodulo delle p -catene aventi sostegno contenuto in $D \cap U$. Per omologia differenziabile relativa di U mod. D (cioè di U mod. $D \cap U$) intenderemo l'omologia del complesso $\{C_p(U, D; \mathbf{R}), \partial\}$ (dove ∂ è l'omomorfismo bordo indotto), e la indicheremo con $H_*(U \text{ mod. } D; \mathbf{R})$.

Indicheremo poi con $C^p(U, D; \mathbf{R})$ l' $\mathbf{R}$ -modulo delle p -cocatene singolari differenziabili, a valori reali, di U mod. D ; esso è duale di $C_p(U, D; \mathbf{R})$ e si può identificare con l' $\mathbf{R}$ -modulo delle funzioni lineari reali sulle p -catene differenziabili di U , che sono nulle sulle catene a sostegno contenuto in $D \cap U$.

Consideriamo ora i prefasci C^p e Z^p su X :

$$(3.1) \quad C^p: U \longrightarrow C^p(U, D; \mathbf{R}), \quad Z^p: U \longrightarrow Z^p(U, D; \mathbf{R}),$$

dove $Z^p(U, D; \mathbf{R})$ è l' $\mathbf{R}$ -modulo dei p -cocicli relativi di $C_p(U, D; \mathbf{R})$.

Per ogni aperto V contraibile (cfr. n. 2) la successione:

$$(3.2) \quad 0 \longrightarrow Z^{p-1}(V, D; \mathbf{R}) \longrightarrow C^{p-1}(V, D; \mathbf{R}) \xrightarrow{\delta} Z^p(V, D; \mathbf{R}) \longrightarrow 0$$

è esatta, perché V e $V \cap D$ hanno il tipo d'omotopia di un punto.

Passando al limite diretto, per ogni $x \in X$, sugli aperti contraibili $V \ni x$, indicati con $\tilde{Z}^p, \tilde{C}^p$ i fasci di germi di cocatene corrispondenti rispettivamente ai prefasci Z^p, C^p , si ottiene da (3.2), per $p = 1, 2, \dots$, la successione esatta di fasci:

$$(3) \quad 0 \longrightarrow \tilde{Z}^0 \xrightarrow{i} \tilde{C}^0 \xrightarrow{\delta} \tilde{C}^1 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \tilde{C}^p \xrightarrow{\delta} \dots,$$

la quale costituisce una risoluzione fina del fascio $\mathbf{R}_{X-D}$ dei reali concentrato su $X - D$, in quanto il fascio $\tilde{Z}^0$ dei germi delle 0-cocatene (le quali sono le funzioni costanti sugli aperti U) ha la fibra su $x \in X - D$ coincidente con $\mathbf{R}$ e la fibra su $y \in D$ ridotta al solo zero; d'altra parte si riconosce, come nel caso assoluto (cfr. [2]), che i fasci $\tilde{C}^p$ sono fini.

4. L'OMOMORFISMO DI COMPLESSI, §. - L'integrale di una p -forma $\alpha^p \in \Omega^p(U, D)$, (cioè nulla su D , cfr. n. 2), su un p -simpleso differenziabile σ_p il cui sostegno è contenuto in $D \cap U$, è nullo:

$$(4.1) \quad \int_{\sigma_p} \alpha^p = 0.$$

Ciò segue dalle ipotesi poste nel n. 2.

Da (4.1) e dal teorema di Stokes si deduce il teorema di Stokes «relativo»:

$$(4.2) \quad \int_{c_{p+1}} d\alpha_p = \int_{\partial c_{p+1}} \alpha^p, \quad \begin{array}{l} c_{p+1} \in C_{p+1}(U, D; \mathbf{R}) \\ \partial c_{p+1} \in C_p(U, D; \mathbf{R}). \end{array}$$

Quanto precede mostra che l'integrale:

$$(4.3) \quad \int_{c_p} \alpha^p, \quad \begin{array}{l} \alpha^p \in \Omega_p(U, D) \\ c_p \in C_p(U, D; \mathbf{R}), \end{array}$$

definisce, analogamente al caso assoluto, un omomorfismo di $\mathbf{R}$ -moduli:

$$(4.4) \quad \mathfrak{J} : \Omega^p(U, D) \longrightarrow C^p(U, D; \mathbf{R}),$$

il quale è un omomorfismo del complesso $\{\Omega^p(U, D), d\}$, delle forme di U nulle su D , nel complesso $\{C^p(U, D; \mathbf{R}), \delta\}$ delle cocatene differenziabili relative di U mod. D , giacché, per la definizione di omomorfismo cobordo e la (4.2), risulta:

$$(4.5) \quad \delta \mathfrak{J} = \mathfrak{J} d.$$

Poiché

$$(4.6) \quad \tilde{\Omega}^0(U, D) = Z^0(U, D; \mathbf{R}),$$

identificandosi tali $\mathbf{R}$ -moduli con $\mathbf{R}$ se $U \cap D = \emptyset$ o con 0 se $U \cap D \neq \emptyset$, si ha che:

$$(4.7) \quad \mathfrak{I} : \check{\Omega}^0(U, D) \longrightarrow Z^0 \rightarrow (U, D; \mathbf{R}) \quad \text{è l'identità.}$$

In ogni aperto V contraibile sussiste allora, come si deduce da (2.4), (3.2), (4.5), il seguente diagramma commutativo a righe esatte:

$$(4.8) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \check{\Omega}^{p-1}(V, D) & \xrightarrow{i} & \Omega^{p-1}(V, D) & \xrightarrow{d} & \check{\Omega}^p(V, D) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \mathfrak{I} & & \downarrow \mathfrak{I} & & \downarrow \mathfrak{I} \\ 0 & \longrightarrow & Z^{p-1}(V, D; \mathbf{R}) & \xrightarrow{i} & C^{p-1}(V, D; \mathbf{R}) & \xrightarrow{\delta} & Z^p(V, D; \mathbf{R}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

dove, per $p=1$, il primo omomorfismo $\mathfrak{I}$ a sinistra è l'identità in base a (4.7).

Per $U = X$, indichiamo con $\mathfrak{I}_*$ l'omomorfismo - indotto da $\mathfrak{I}$ - degli $\mathbf{R}$ -moduli di De Rham $R^p(X, D) = \check{\Omega}^p(X, D)/d\check{\Omega}^{p-1}(X, D)$ negli $\mathbf{R}$ -moduli di coomologia singolare differenziabile relativa $\check{H}^p(X \bmod D; \mathbf{R}) = Z^p(X, D; \mathbf{R})/\delta C^{p-1}(X, D; \mathbf{R})$:

$$(4.9) \quad \mathfrak{I}_* : R^p(X, D) \longrightarrow \check{H}^p(X \bmod D; \mathbf{R}).$$

5. IL TEOREMA DI ISOMORFISMO. - Per conseguire il risultato voluto, occorre provare che $\mathfrak{I}_*$ (cfr. (4.9)) è un isomorfismo. Ciò può ottenersi, come ora faremo, sviluppando la dimostrazione ormai classica del teorema di De Rham, basandosi sulle due risoluzioni fine (2.3), (3.3), una mediante le forme e l'altra mediante le cocatene, del fascio $\mathbf{R}_{X-D}$, e tenendo conto degli omomorfismi che rimangono indotti da $\mathfrak{I}$.

Dal diagramma (4.8), passando al limite diretto sugli aperti V contraibili, si ottiene il diagramma commutativo a righe esatte:

$$(5.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \check{\Omega}^{p-1} & \longrightarrow & \Omega^{p-1} & \longrightarrow & \check{\Omega}^p \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \mathfrak{I} & & \downarrow \mathfrak{I} & & \downarrow \mathfrak{I} \\ 0 & \longrightarrow & \check{Z}^{p-1} & \longrightarrow & \check{C}^{p-1} & \longrightarrow & \check{Z}^p \longrightarrow 0 \end{array}$$

dove $\check{\mathfrak{I}}$ è l'omomorfismo di fasci indotto da $\mathfrak{I}$, e ancora, per $p=1$, il primo $\check{\mathfrak{I}}$ a sinistra è l'identità di $\check{\Omega}^0 = \check{Z}^0 = \mathbf{R}_{X-D}$.

A sua volta $\check{\mathfrak{I}}$ induce un omomorfismo $\check{\mathfrak{I}}_*$ tra gli $\mathbf{R}$ -moduli di coomologia delle successioni esatte di coomologia (di Čech o di Grothendieck-Godement) che si deducono dalle due righe esatte di (5.1), essendo X paracompatta.

Indicato con $\mathfrak{V}$ il ricoprimento di X costituito dagli aperti contraibili V , denoteremo con $C_{\mathfrak{V}, p}(X, D; \mathbf{R})$ il sottomodulo di $C_p(X, D; \mathbf{R})$ costituito dalle p - $\mathfrak{V}$ -catene differenziabili di $X \bmod D$, cioè delle p -catene combinazioni lineari (finite) di semplici il cui sostegno è contenuto in uno degli

aperti V . Le p -cocatene singolari differenziabili di X mod. D definite sulle $\mathfrak{W}$ -catene $C_{\mathfrak{W},p}(X, D; \mathbf{R})$ costituiscono l' $\mathbf{R}$ -modulo $C_{\mathfrak{W}}^p(X, D; \mathbf{R})$ delle p - $\mathfrak{W}$ -cocatene differenziabili di X mod. D (o cocatene localizzate di X mod. D).

Ciò posto lo zeresimo $\mathbf{R}$ -modulo di coomologia $H^0(X, \tilde{C}^p) = \Gamma(X, \tilde{C}^p)$ a valori nel fascio $\tilde{C}^p$ di germi di cocatene, si identifica con l' $\mathbf{R}$ -modulo $C_{\mathfrak{W}}^p(X, D; \mathbf{R})$ delle p - $\mathfrak{W}$ -cocatene differenziabili di X mod. D e analogamente $H^0(X, \tilde{Z}^p) = \Gamma(X, \tilde{Z}^p)$ si identifica all' $\mathbf{R}$ -modulo $Z_{\mathfrak{W}}^p(X, D; \mathbf{R})$ dei p - $\mathfrak{W}$ -cocicli di $C_{\mathfrak{W}}^p(X, D; \mathbf{R})$. Si ha quindi:

$$(5.2) \quad H^0(X, \tilde{C}^p) = C_{\mathfrak{W}}^p(X, D; \mathbf{R}) \quad , \quad H^0(X, \tilde{Z}^p) = Z_{\mathfrak{W}}^p(X, D; \mathbf{R}) ,$$

e anche, come noto:

$$(5.3) \quad H^0(X, \tilde{\Omega}^p) = \Omega^p(X, D) \quad , \quad H^0(X, \tilde{\Omega}^{\circ p}) = \Omega^{\circ p}(X, D) .$$

Tenuto allora conto di (5.2.), (5.3) e del fatto che i fasci $\tilde{\Omega}^p, \tilde{C}^p$ sono fini, da (5.1) si trae, con la solita tecnica:

$$(5.4) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow d\Omega^{p-1}(X, D) & \rightarrow & \tilde{\Omega}^p(X, D) & \rightarrow & H^1(X, \tilde{\Omega}^{p-1}) \approx H^2(X, \tilde{\Omega}^{p-2}) \approx \dots \approx H^p(X, \tilde{\Omega}^0) \\ \downarrow \mathfrak{I}_{\mathfrak{W}} & & \downarrow \mathfrak{I}_{\mathfrak{W}} & & \downarrow \mathfrak{I}_* & & \downarrow \mathfrak{I}_* \\ 0 \rightarrow \delta C_{\mathfrak{W}}^{p-1}(X, D; \mathbf{R}) & \rightarrow & Z_{\mathfrak{W}}^p(X, D; \mathbf{R}) & \rightarrow & H^1(X, \tilde{Z}^{p-1}) \approx H^2(X, \tilde{Z}^{p-2}) \approx \dots \approx H^p(X, \tilde{Z}^0) \end{array}$$

dove $\mathfrak{I}_{\mathfrak{W}}$ è l'omomorfismo che si ottiene integrando sulle $\mathfrak{W}$ -catene, e l'ultimo omomorfismo $\mathfrak{I}_*$ a destra è l'identità, perché è indotto dalla identità di $\mathbf{R}_{X-D} (= \tilde{\Omega}^0 = \tilde{Z}^0)$. Ne segue che tutti gli altri $\mathfrak{I}_*$ sono isomorfismi. Da ciò, posto $Z_{\mathfrak{W}}^p(X, D; \mathbf{R})/\delta C_{\mathfrak{W}}^{p-1}(X, D; \mathbf{R}) = \overset{s}{H}_{\mathfrak{W}}^p(X \text{ mod. } D; \mathbf{R})$, segue che:

(I) *L'omomorfismo:*

$$\mathfrak{I}_{\mathfrak{W}*} : R^p(X, D) \longrightarrow \overset{s}{H}_{\mathfrak{W}}^p(X \text{ mod. } D; \mathbf{R})$$

è un isomorfismo.

Per passare dalla $\mathfrak{W}$ -coomologia d.r. (differenziabile relativa) alla coomologia d.r. basta notare che la prima è duale della $\mathfrak{W}$ -omologia d.r., la quale è isomorfa all'omologia d.r., l'isomorfismo essendo indotto, come nel caso singolare continuo, da una inclusione. Facendo allora uso di suddivisioni baricentriche iterate si riconosce che integrando le classi relative di De Rham sulle $\mathfrak{W}$ -catene d.r. o sulle catene d.r. si ottengono le medesime classi di coomologia; cioè:

(II) *L'omomorfismo:*

$$\mathfrak{I}_* : R^p(X, D) \longrightarrow \overset{s}{H}^p(X \text{ mod. } D; \mathbf{R})$$

è un isomorfismo, ovvero: *l'isomorfismo di De Rham si può realizzare — nelle ipotesi del n. 2 — mediante integrazione, sulle catene differenziabili relative di X mod. D , delle classi relative di De Rham.*

Inoltre, come nel caso assoluto, effettuando le integrazioni sui soli cicli (differenziabili relativi) si ottiene il medesimo isomorfismo; pertanto:

(III) Nelle ipotesi del n. 2, *l'isomorfismo che esprime la dualità tra la coomologia di De Rham è l'omologia singolare relative* (cfr. [8], n. 5)

$$R^p(X, D) \approx \text{Hom}({}_w H_p^s(H \text{ mod. } D, \mathbf{Z}), \mathbf{R}) \approx \text{Hom}(H_p(X \text{ mod. } D; \mathbf{R}), \mathbf{R})$$

si può realizzare mediante integrazione, sulle classi dei cicli differenziabili relativi di $X \text{ mod. } D$, delle classi relative di De Rham.

Ciò permette, una volta introdotta una base nell' $\mathbf{R}$ -modulo $H_p(X \text{ mod. } D; \mathbf{R})$ – *cicli fondamentali* di $X \text{ mod. } D$ – e considerati i corrispondenti *periodi* relativi delle forme differenziali (nulle su D), di enunciare, in forma perfettamente analoga a quella del caso assoluto, il I e II teorema di De Rham per le varietà relative.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. ANDREOTTI, *Calcolo delle variazioni in grande – Teoria di Morse*. (Corso di Geometria Superiore. Univ. di Pisa, 1960–61); *Seminario E.E. Levi* (Pisa 1962).
- [2] H. CARTAN, *Séminaire E.N.S.*, 1950–51 (Paris 1955).
- [3] G. DE RHAM, *Variétés différentiables* (Hermann, Paris 1955); *La théorie des formes différentielle extérieures et l'homologie des variétés différentiables* (Corso CIME, 1960), « Rend. Mat. Univ. Roma », 20, 105–146 (1961).
- [4] S. EILENBERG, *Singular homology theory*, « Ann. of Math. », 45, 406–447 (1944); *Singular homology theory in differentiable manifolds*, « Ann. of Math. », 48, 670–681 (1947).
- [5] S. EILENBERG–N. STEENROD, *Foundations of algebraic topology* (Princeton University Press, 1952).
- [6] R. GODEMENT, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris (1958).
- [7] P. J. HILTON–S. WYLIE, *Homology theory* (Cambridge Univ. Press, 1960).
- [8] F. SUCCI, *Il teorema di De Rham e la dualità per le varietà relative*, « Rend. Acc. Lincei », 35, 496–503, Roma (1963).
- [9] R. THOM, *Les singularités des applications différentiables*, « Ann. Inst. Fourier », 6, 17–86 (1956).
- [10] A. WEIL, *Sur les théorèmes de De Rham*, « C.M.H. », 26, 119–145 (1952).

ABSTRACT. — It is shown that the De Rham's isomorphism for a relative manifold $X \text{ mod. } D$, where D is a closed subset of X subject to weak conditions, can be realised, like in the absolute case, by integration, on the differentiable relative cycles, of closed forms of X vanishing on D .