Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mario Miranda

Analiticità delle superfici di area minima in R^4

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.5, p. 632–638.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_5_632_0>

Matematica. — *Analiticità delle superfici di area minima in* R^4. Nota di MARIO MIRANDA, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

INTRODUZIONE. – In questo lavoro proveremo che le superfici cartesiane continue tridimensionali di area minima sono analitiche.

Il lavoro consiste essenzialmente nell'adattamento al caso cartesiano dei risultati di De Giorgi [1] e Triscari [2] riguardanti le frontiere orientate di misura minima in R^4.

1. FRONTIERE ORIENTATE DI MISURA MINIMA. – Ricordiamo alcune definizioni e risultati.

DEFINIZIONE 1.1 (ved. [3], p. 45). – *Diremo che un insieme misurabile* $E \subset R^n$ *ha perimetro localmente finito su un aperto* $A \subset R^n$ *se la funzione caratteristica* $\varphi(x, E)$ *di* E *ha derivate prime, nel senso delle distribuzioni, che sono misure su* A. *Se* B *è un sottoinsieme di Borel di* A *indicheremo con* $\int_B |D\varphi(x, E)|$ *la variazione totale su* B *del gradiente di* $\varphi(x, E)$.

DEFINIZIONE 1.2 (ved. [1], p. 3). – *Diremo che un insieme misurabile* $E \subset R^n$ *ha frontiera orientata localmente di misura minima sull'aperto* $A \subset R^n$ *se* E *ha perimetro localmente finito su* A *e se per ogni compatto* $K \subset A$ *ed ogni insieme* L *di perimetro localmente finito su* A, *per cui valga* $E - K = L - K$, *si ha*

$$\int_K |D\varphi(x, L)| \geq \int_K |D\varphi(x, E)| \cdot \tag{1.1}$$

Se E è un insieme misurabile di R^n ed $\mathfrak{F}E$ è la sua frontiera possiamo supporre che valga, posto $C_\rho(x) = \{y ; |x - y| < \rho\}$,

$$x \in \mathfrak{F}E <=> 0 < \operatorname{mis}\{E \cap C_\rho(x)\} < \operatorname{mis} C_\rho(x), \ \forall \rho > 0. \tag{1.2}$$

Infatti per ogni insieme misurabile esiste un insieme ad esso equivalente (differente da esso per un insieme di misura nulla) per il quale la (1.2) è verificata (cfr. [3], p. 44).

In quanto diremo supporremo perciò che E verifichi senz'altro la (1.2).

DEFINIZIONE 1.3 (ved. [4], p. 10). – *Diremo frontiera ridotta di un insieme* E *di perimetro localmente finito su* R^n *l'insieme* $\mathfrak{F}^*E$ *dei punti* ξ *per*

(*) Nella seduta dell'8 maggio 1965.

cui valgono le seguenti relazioni

$$\int_{C_\varrho(\xi)} | D\varphi(x, E) | > 0 \,, \ \forall \rho > 0 \,, \tag{1.3}$$

$$\text{esiste} \lim_{\varrho \to 0} \frac{\int_{C_\varrho(\xi)} D\varphi(x, E)}{\int_{C_\varrho(\xi)} | D\varphi(x, E) |} = \nu(\xi) \,, \tag{1.4}$$

$$| \nu(\xi) | = 1 \,. \tag{1.5}$$

Vale, come facilmente si verifica, $\mathcal{F}^* E \subset \mathcal{F} E$ ma non il viceversa, in generale.

DEFINIZIONE 1.4 (ved. [4], p. 13). – *Diremo che un insieme* $X \subset R^n$ *è una ipersuperficie localmente regolare se per ogni punto* $\xi \in X$ *esistono un aperto* Ω *contenente* ξ *ed una funzione* F *definita su* Ω *ed ivi continua colle derivate parziali prime, tali che risulti*

$$\text{grad } F(y) \neq 0 \,, \ \forall y \in \Omega \,, \tag{1.6}$$

$$X \cap \Omega = \{ x \,;\, F(x) = 0 \} \,. \tag{1.7}$$

Per le frontiere orientate di misura minima De Giorgi ha stabilito il seguente risultato (v. [1], pag. 56).

TEOREMA 1.5. – *Se* $E \subset R^n$ $(n \geq 2)$ *ha frontiera orientata di misura minima sull'aperto* $A \subset R^n$, *allora* $\mathcal{F}^* E \cap A$ *è una ipersuperficie localmente regolare.*

Triscari ha studiato in [2] la differenza $\mathcal{F} E - \mathcal{F}^* E$ nel caso in cui $E \subset R^4$ abbia frontiera orientata di misura minima, ed ha stabilito il seguente risultato (v. [2], Teor. XI).

TEOREMA 1.6 – *Se* $E \subset R^4$ *ha frontiera orientata di misura minima sull'aperto* $A \subset R^4$, *allora* $(\mathcal{F} E - \mathcal{F}^* E) \cap A$ *è costituito al più di punti isolati.*

2. LE SUPERFICI CARTESIANE DI AREA MINIMA COME FRONTIERE ORIENTATE DI MISURA MINIMA. – Riportiamo innanzitutto alcune definizioni e risultati contenuti in [5] e [6].

Indichiamo con Ω un aperto limitato e uniformemente convesso di R^n $(n \geq 2)$, dove per uniforme convessità si intende che esiste una costante positiva k e, per ogni $x \in \partial\Omega$, un iperpiano Π_x di R^n passante per x, tale che Ω venga a trovarsi in uno dei due semispazi da esso determinati e tale che valga la relazione

$$\frac{| y - x |^2}{\operatorname{dist}(y, \Pi_x)} \leq k \,, \ \forall y \in \Omega \,. \tag{2.1}$$

Se f è una funzione continua su $\overline{\Omega}$ indichiamo con area $\{ y = f(x) \,;\, x \in \overline{\Omega} \}$ la quantità, eventualmente infinita:

$$\inf \left\{ \min_{h \to \infty} \lim \int_\Omega \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} | D_i f_h |^2} \, dx \,;\, f_h \to f \text{ unif. su } \Omega \,, f_h \in C^1(\overline{\Omega}) \right\} .$$

Ricordiamo che nelle ipotesi fatte per Ω se φ è una qualunque funzione continua sulla frontiera $\partial\Omega$ di Ω esistono funzioni $\Phi \in C(\bar{\Omega})$ tali che $\Phi = \varphi$ su $\partial\Omega$ e tali che

$$\text{area}\,\{y = \Phi(x)\,;\, x \in \bar{\Omega}\} < \infty\,, \tag{2.2}$$

ed anzi fra tali funzioni ne esiste una ed una sola per cui l'area è minima.

Se $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, indichiamo con $\int_\Omega |d\nu_f|$ la quantità, eventualmente infinita:

$$\sup \left\{ \int \left[f \sum_{i=1}^{n} D_i g_i + g_{n+1} \right] dx\,;\, g_i \in \mathcal{D}(\Omega)\,,\, \sum_{i=1}^{n+1} g_i^2 \leq 1 \right\}.$$

Ricordiamo che, essendo Ω limitato, $\int_\Omega |d\nu_f| < \infty$ se e solo se f ha derivate misure su Ω e se queste hanno variazione totale finita su Ω. Ricordiamo inoltre che se f è continua allora vale,

$$\text{area}\,\{y = f(x)\,;\, x \in \bar{\Omega}\} = \int_\Omega |d\nu_f|\,. \tag{2.3}$$

Possiamo ora provare il seguente lemma,

LEMMA 2.1. – *Sia* $\Omega \subset R^n$ $(n \geq 2)$ *aperto limitato e uniformemente convesso, ed* $\{y = u(x)\,;\, x \in \bar{\Omega}\}$ *superficie continua di area minima. Allora per ogni* $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *continua in un intorno di* $\partial\Omega$ *per la quale valga* $f = u$ *su* $\partial\Omega$, *si verifica*

$$\text{area}\,\{y = u(x)\,;\, x \in \bar{\Omega}\} \leq \int_\Omega |d\nu_f|\,. \tag{2.4}$$

Dim. Indichiamo con $\tilde{f}$ una funzione, prolungamento della f a tutto R^n, continua su $R^n - \Omega$ e con derivate misure su R^n. Sia $\{f_h\}$ una successione regolarizzante di $\tilde{f}$. Vale allora (cfr. Lemma 5.1 e Teor. 7.1 di [6]) la diseguaglianza

$$\text{area}\,\{y = u(x)\,;\, x \in \bar{\Omega}\} \leq \int_\Omega \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} |D_i f_h|^2}\, dx + c(\Omega) \max_{\partial\Omega} |u - f_h|\,. \tag{2.5}$$

Passando al limite nella (2.5) e osservando che vale $\lim f_h = f$ uniformemente su $\partial\Omega$ e che (cfr. anche [6], n. 8)

$$\int_\Omega |d\nu_f| = \lim_{h\to\infty} \int_\Omega \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} |D_i f_h|^2}\, dx\,, \tag{2.6}$$

si ricava la (2.4).

c.v.d.

Grazie ad alcuni risultati contenuti in [5], e che richiameremo nel corso della dimostrazione, possiamo provare la seguente

PROPOSIZIONE 2.3. – *Sia* $\Omega \subset R^n$ $(n \geq 2)$ *aperto limitato e uniformemente convesso, sia* $u \in C(\overline{\Omega})$. *Se la superficie* $\{y = u(x)\ ;\ x \in \overline{\Omega}\}$ *è di area minima, allora l'insieme* $E = \{(x, y)\ ;\ x \in \Omega\ ,\ y < u(x)\}$ *ha frontiera orientata localmente di misura minima in* $\Omega \times R$.

Dim. Sia K un compatto di $\Omega \times R$ ed L un insieme di perimetro localmente finito in $\Omega \times R$ e tale che

$$L - K = E - K . \tag{2.7}$$

Indichiamo con f la funzione definita quasi ovunque su Ω da

$$f(x) = \lim_{h \to \infty} \left\{ \int_{-h}^{h} \varphi(x, y ; L)\, dy - h \right\}. \tag{2.8}$$

La $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e verifica (cfr. [5], p. 532)

$$\int_{\Omega} |d\nu_f| \leq \int_{\Omega \times R} |D\varphi(x, y ; L)| . \tag{2.9}$$

Inoltre, grazie alla (2.7), f coincide con u in un intorno di $\partial\Omega$, pertanto, grazie al Lemma 2.1, si ha

$$\text{area}\ \{y = u(x) ; x \in \overline{\Omega}\} \leq \int_{\Omega} |d\nu_f| . \tag{2.10}$$

D'altra parte vale (cfr. [5], p. 524 e [6], n. 8)

$$\text{area}\ \{y = u(x)\ ;\ x \in \overline{\Omega}\} = \int_{\Omega \times R} |D\varphi(x, y ; E)| . \tag{2.11}$$

Dalle (2.9) , (2.10) e (2.11) segue allora

$$\int_{\Omega \times R} |D\varphi(x, y ; E)| \leq \int_{\Omega \times R} |D\varphi(x, y ; L)| . \tag{2.12}$$

Ma dalla (2.7) segue facilmente

$$\int_{\Omega \times R - K} |D\varphi(x, y ; E)| = \int_{\Omega \times R - K} |D\varphi(x, y ; L)| , \tag{2.13}$$

e quindi dalle (2.12) e (2.13) segue la

$$\int_{K} |D\varphi(x, y ; E)| \leq \int_{K} |D\varphi(x, y ; L)| . \tag{2.14}$$

c.v.d.

Proviamo ora una proposizione che inverte, sia pure in ipotesi molto restrittive, il risultato stabilito nella Prop. 2.3.

PROPOSIZIONE 2.4. – *Siano* $\Omega \subset R^n$ $(n \geq 2)$ *aperto ed* $f \in C^1(\Omega)$ *tali che l'insieme* $E = \{(x, y) \, ; \, x \in \Omega, y < f(x)\}$ *abbia frontiera orientata localmente di misura minima in un cilindro aperto* $\Omega \times (a, b)$, *con* $a < \inf_{\Omega} f(x)$, $b > \sup_{\Omega} f(x)$, *allora* f *è analitica in* Ω *e verifica in* Ω *l'equazione delle superfici minime, cioè*

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{n} |D_i f|^2\right) \Delta f - \sum_{i,j=1}^{n} D_i f D_j f D_i D_j f = 0. \tag{2.15}$$

Dim. Basta evidentemente far vedere, per noti teoremi di regolarizzazione, che per ogni sfera chiusa $C \subset \Omega$ e per ogni $g \in \mathfrak{D}(\Omega)$ esiste $\sigma > 0$ tale che

$$\int_C \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} |D_i (f + \varepsilon g)|^2} \, dx \geq \int_C \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} |D_i f|^2} \, dx, \qquad \text{per } |\varepsilon| \subset \sigma. \tag{2.16}$$

Fissati C e g determiniamo un compatto $K \subset C \times (a, b)$ e un numero $\sigma > 0$ tali che

$$\{(x, y) \, ; x \in C, |y - f(x)| \leq |\varepsilon g(x)|\} \subset K, \qquad \text{per } |\varepsilon| < \sigma. \tag{2.17}$$

Indichiamo con L_ε l'insieme $\{(x, y) \, ; x \in \Omega, a < y < f(x) + \varepsilon g(x)\}$. Avremo allora, per la (2.17), che vale $L_\varepsilon - K = E - K$, per $|\varepsilon| < \sigma$, e quindi, per la proprietà di minimo di E, varrà

$$\int_K |D\varphi(x, y \, ; E)| \leq \int_K |D\varphi(x, y \, ; L_\varepsilon)|, \qquad \text{per } |\varepsilon| > \sigma. \tag{2.18}$$

Ma, ricordando che vale

$$\int_B |D\varphi(x, y \, ; E)| = \inf \left\{ \int_A |D\varphi(x, y \, ; E)| \, ; A \supset B, A \text{ aperto} \right\} \tag{2.19}$$

$$\int_A |D\varphi(x, y \, ; E)| = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} g \, dx dy \, ; g_i \in \mathfrak{D}(A), \sum_{i=1}^{n+1} g_i^2 = 1 \right\}, \tag{2.20}$$

per le formule di Green classiche si ha allora

$$\int_{C \times (a,b)} |D\varphi(x, y \, ; E)| = \int_C \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} |D_i f|^2} \, dx. \tag{2.21}$$

Grazie alla (2.21) e all'analoga formula valida per L_ε, alle (2.18) e

$$\int_{C \times (a,b) - K} |D\varphi(x, y \, ; E)| = \int_{C \times (a,b) - K} |D\varphi(x, y \, ; L_\varepsilon)|, \tag{2.22}$$

si ha che vale la (2.16).

c.v.d.

3. ANALITICITÀ DELLE SUPERFICI CARTESIANE CONTINUE DI AREA MINIMA IN R^4. – Proviamo innanzitutto il seguente lemma.

LEMMA 3.1 – *Sia* $\{y = u(x) ; x \in \overline{\Omega}\}$, $\Omega \subset R^n$ $(n \geq 2)$, *una superficie continua di area minima. Sia* $E = \{(x, y) ; x \in \Omega, y < u(x)\}$ *e supponiamo che* $\mathcal{F}E$ *sia ipersuperficie regolare in un intorno di un punto* $(\xi, u(\xi)) \in \mathcal{F}E \cap (\Omega \times R)$. *Allora* u *è di classe* C^1 *in un intorno di* ξ.

Dim. Dalla ipotesi di regolarità di $\mathcal{F}E$ si ha che esiste una sfera $S \subset \Omega \times R$ di centro $(\xi, u(\xi))$ ed una funzione $F \in C^1(S)$, con grad $F(s) \neq 0$ per $s \in S$, per cui vale

$$S \cap \mathcal{F}E = \{(x, y) ; F(x, y) = 0\}. \tag{3.1}$$

Per il teorema del Dini sulle funzioni implicite basterà far vedere che $F_y(\xi, u(\xi)) \neq 0$.

Supponiamo per assurdo che sia

$$F_y(\xi, u(\xi)) = 0. \tag{3.2}$$

Esisterà allora $i \leq n$, e possiamo supporre che $i = 1$, per cui

$$D_1 F(\xi, u(\xi)) \neq 0. \tag{3.3}$$

Per il Teorema del Dini sulle funzioni implicite da (3.3) segue che esistono $\varepsilon, \sigma > 0$ e $g \in C^1(I)$, dove $I = \{(x_2, \cdots, y) ; |x_i - \xi_i| < \varepsilon \ (i \geq 2), |y - u(\xi)| < \varepsilon\}$, tali che

$$\mathcal{F}E \cap \{(x, y) ; (x_2, \cdots, y) \in I, |x_1 - \xi_1| < \sigma\} = \{x_1 = g(x_2 \cdots y) ; (x_2 \cdots y) \in I\}. \tag{3.4}$$

Per le Proposizioni 2.3 e 2.4 si ha che g è analitica in I e verifica l'equazione

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{n} |D_i g|^2\right) \Delta g - \sum_{i,j=1}^{n} D_i g D_j g D_i D_j g = 0. \tag{3.5}$$

Derivando la (3.5) rispetto a y e ponendo $\psi = g_y$ si ha

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{n} |D_i g|^2\right) \Delta \psi - \sum_{i,j=1}^{n} D_i g D_j g D_i D_j \psi + \\ + 2 \sum_{i=1}^{n} \left[\Delta g \cdot D_i g - \sum_{j=1}^{n} D_j g D_i D_j g\right] D_i \psi = 0. \tag{3.6}$$

Per la (3.6) vale il principio di massimo forte (cfr. [7], p. 326) d'altra parte vale $\psi(\xi_2, \cdots, \xi_n, u(\xi)) = 0$, mentre in I la ψ e non negativa o non positiva, tale essendo la F_y su $\mathcal{F}E$, deve perciò essere $\psi \equiv 0$, cioè g non dipende da y. Ma ciò è assurdo perché $\mathcal{F}E$ ha una rappresentazione cartesiana sul piano $\{(x, y) ; y = 0\}$.

c.v.d.

TEOREMA 3.2 – *Se* $\{y = u(x) ; x \in \Omega\}$, $\Omega \subset R^3$, *è una superficie continua di area minima, allora* u *è analitica in* Ω.

Dim. Per i Teorr. 1.5 e 1.6, per la Prop. 2.3 il Lemma 3.1 si ha che u è analitica in $\Omega - N$ dove N è costituito al più di punti isolati. Ma per un risultato di De Giorgi e Stampacchia (cfr. [8], Teor. 3.1) deve essere $N = \emptyset$.

c.v.d.

Dal teorema ora provato e da quanto visto in [6] si ha che vale il seguente risultato

TEOREMA 3.3. – *Se Ω è un aperto limitato e uniformemente convesso di* R^3, *e φ è una funzione continua su $\partial\Omega$, allora esiste ed è unica $f \in C(\overline{\Omega})$ tale che*

i) $f = \varphi$, su $\partial\Omega$,

ii) area $\{y = f(x) \,;\, x \in (\overline{\Omega})\} = \min\{\text{area}\{y = g(x) \,;\, x \in \overline{\Omega}\} \,;\, g \in (\overline{\Omega})$, $g = \varphi$ *su* $\partial\Omega\}$ *ed inoltre f è analitica in Ω e verifica l'equazione*

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{n} |D_i f|^2\right) \Delta f - \sum_{i,j=1}^{n} D_i f D_j f D_i D_j f = 0. \tag{3.7}$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] E. DE GIORGI, *Frontiere orientate di misura minima*, « Sem. Mat. S.N.S. », Pisa 1960.

[2] D. TRISCARI, *Sulle singolarità delle frontiere orientate di misura minima nello spazio euclideo a 4 dimensioni*, « Le Matematiche », Catania 1964.

[3] M. MIRANDA, *Distribuzioni aventi derivate misure ed insiemi di perimetro localmente finito* « Ann. S.N.S. », Pisa 1964.

[4] E. DE GIORGI, *Complementi alla teoria della misura $(n - 1)$-dimensionale*, « Sem. Mat. S.N.S. », Pisa 1960.

[5] M. MIRANDA, *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito sui prodotti cartesiani*, « Ann. S.N.S. », Pisa 1964.

[6] M. MIRANDA, *Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in n variabili* « Ann. S.N.S. », Pisa 1965.

[7] R. COURANT–D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 2, Interscience, New-York 1962.

[8] E. DE GIORGI–G. STAMPACCHIA, *Sulle singolarità eliminabili delle ipersuperficie minimali*, « Rend. dell'Acc. Naz. dei Lincei », Marzo 1965.