ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

MAURO PAGNI

Un teorema di tracce

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.5, p. 627–631.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_5_627_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Equazioni alle derivate parziali. — *Un teorema di tracce*. Nota di MAURO PAGNI, presentata [*] dal Socio G. SANSONE.

Nella presente Nota si considerano le tracce, su iperpiani coordinati, degli elementi di uno spazio funzionale che interviene nello studio dei problemi al contorno per una certa classe di equazioni ipoellittiche [1].

Indichiamo con $x = (x_1, \cdots, x_r)$ i punti di R_x^r (spazio euclideo reale ad r dimensioni), con $y = (y_1, \cdots, y_s)$ i punti di R_y^s (spazio euclideo reale ad s dimensioni) e con R il prodotto topologico $R_x^r \times R_y^s$.

Sia S lo spazio delle funzioni $u(x, y)$ indefinitamente differenziabili su R ed ivi a decrescenza rapida e S′ il duale di S, cioè lo spazio delle distribuzioni temperate, ed indichiamo con $\tilde{u}(\xi, \eta)$ la trasformata di Fourier

$$\int e^{-i(x\xi + y\eta)} u(x, y)\, dx\, dy \qquad \text{di} \quad u(x, y) \in S'.$$

Posto

$$k(\xi, \eta) = \prod_{i=1}^{n} (1 + |\xi|^{p_i} + |\eta|^{q_i}),$$

(p_i, q_i, interi positivi e $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_r^2$, $|\eta|^2 = \eta_1^2 + \cdots + \eta_s^2$), introduciamo lo spazio $H_k(R)$ così definito

$$H_k(R) = \left\{ u : u \in S', \int k^2(\xi, \eta)\, |\tilde{u}(\xi, \eta)|^2\, d\xi\, d\eta < \infty \right\}$$

con

$$\|u\|_{H_k(R)} = \left(\int k^2(\xi, \eta)\, |\tilde{u}(\xi, \eta)|^2\, d\xi\, d\eta \right)^{1/2}$$

Detto Y l'iperpiano di R definito da $y_s = 0$ e posto $y' = (y_1, \cdots, y_{s-1})$, $\eta' = (\eta_1, \cdots, \eta_{s-1})$, $\nu = \sum_{i=1}^{n} q_i - 1$, $p_0 = q_0 = 0$, si ha il seguente teorema di tracce [2].

(*) Nella seduta del 10 aprile 1965.

(1) Si veda B. PINI, *Sulle tracce di un certo spazio funzionale*, I. « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XXXVII (1964), II. ibidem, vol. XXXVIII (1965) e M. PAGNI, *Problemi al contorno per una certa classe di operatori ipoellittici*, Comunicazioni del Convegno sulle equazioni alle derivate parziali, tenutosi a Nervi nel febbraio 1965.

(2) Un caso particolare di questo teorema si trova in B. PINI, loc. cit. in (1).

L'applicazione $u(x,y) \to \left(u(x;y',0)\,,\,\frac{\partial u}{\partial y_s}(x;y',0)\,,\cdots,\,\frac{\partial^\nu}{\partial y_s^\nu}(x,y',0)\right)$

è lineare e continua di $H_k(R)$ *su* $\prod_{j=0}^{\nu} H_{h_j}(Y)$, *dove*

$$h_j(\xi,\eta)=\left[1+|\xi|^{p_m-\frac{p_m}{q_m}\left(\frac{1}{2}+j-\sum\limits_{i=0}^{m-1}q_i\right)}+|\eta'|^{q_m-\left(\frac{1}{2}+j-\sum\limits_{i=0}^{m-1}q_i\right)}\right]\prod_{i=m+1}^{n}(1+|\xi|^{p_i}+|\eta'|^{q_i}),$$

con

$$\frac{p_i}{q_i}\le\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}\,,\qquad per\ \sum_{i=0}^{m-1}q_i\le j\le\sum_{i=0}^{m}q_i-1\,,\qquad m=1\,,\cdots,n\,.$$

Premettiamo alla dimostrazione le due seguenti maggiorazioni. Per $\sum_{i=0}^{m-1}q_i\le j\le\sum_{i=0}^{m}q_i-1$, $m=1,\cdots,n$ si ha

$$(1)\qquad k(\xi,\eta)\left[h_j(\xi,\eta')(1+|\xi|^{\frac{p_m}{q_m}\left(\frac{1}{2}+j\right)}|\eta'|^{\left(\frac{1}{2}+j\right)}\right]^{-1}\le$$

$$\le C\prod_{i=0}^{m-1}\left[1+\left(\frac{|\eta_s|}{1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|}\right)^{q_i}\right]\prod_{i=m}^{n}\left[1+\left(\frac{|\eta_s|}{1+|\xi|^{p_i/q_i}+|\eta'|}\right)^{q_i}\right]\le$$

$$\le C\left[1+\frac{|\eta_s|}{1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|}\right]^{\nu+1},$$

$$(2)\qquad h_j(\xi,\eta')\,|\eta_s|^{j}\,[k(\xi,\eta)]^{-1}\le C\,(1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|)^{-1/2}\,\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{|\eta_s|}{1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|}\right)^{j-\sum\limits_{i=1}^{m}q_i},$$

con le C costanti opportune.

Infatti

$$k(\xi,\eta)\left[h_j(\xi,\eta')(1+|\xi|^{\frac{p_m}{q_m}\left(\frac{1}{2}+j\right)}+|\eta'|^{\left(\frac{1}{2}+j\right)}\right]^{-1}\le$$

$$\le C\,\frac{k(\xi,\eta)}{\prod\limits_{i=0}^{m-1}(1+|\xi|^{q_i(p_m/q_m)}+|\eta'|^{q_i})\prod\limits_{i=m}^{n}(1+|\xi|^{p_i}+|\eta'|^{q_i})}=$$

$$=C\prod_{i=0}^{m-1}\left(\frac{1+|\xi|^{p_i}+|\eta|^{q_i}}{1+|\xi|^{q_i(p_m/q_m)}+|\eta'|^{q_i}}\right)\prod_{i=m}^{n}\left(\frac{1+|\xi|^{p_i}+|\eta|^{q_i}}{1+|\xi|^{p_i}+|\eta'|^{q_i}}\right);$$

$$\prod_{i=0}^{m-1}\left(\frac{1+|\xi|^{p_i}+|\eta|^{q_i}}{1+|\xi|^{q_i(p_m/q_m)}+|\eta'|^{q_i}}\right)\le C\prod_{i=0}^{m-1}\left(\frac{1+|\xi|^{p_i}+|\eta'|^{q_i}+|\eta_s|^{q_i}}{1+|\xi|^{q_i(p_m/q_m)}+|\eta'|^{q_i}}\right)\le$$

$$\le\left(q_i\frac{p_n}{q_m}\ge p_i\frac{q_m}{q_m}=p_i\right)\le C\prod_{i=0}^{m-1}\left[1+\left(\frac{|\eta_s|}{1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|}\right)^{q_i}\right],$$

$$\prod_{i=m}^{n}\left(\frac{1+|\xi|^{p_i}+|\eta|^{q_i}}{1+|\xi|^{p_i}+|\eta'|^{q_i}}\right)\le\prod_{i=m}^{n}\left[1+\left(\frac{|\eta_s|}{1+|\xi|^{p_i/q_i}+|\eta'|}\right)^{q_i}\right]$$

e quindi la (1). In quanto alla (2) si ha

$$h_j(\xi, \eta')|\eta_s|^j [k(\xi, \eta)]^{-1} = \frac{h_j(\xi, \eta')\left(1+|\xi|^{\left(\frac{1}{2}+j\right)\frac{p_m}{q_m}}+|\eta'|^{\left(\frac{1}{2}+j\right)}\right)|\eta_s|^j}{k(\xi, \eta)\left(1+|\xi|^{\left(\frac{1}{2}+j\right)\frac{p_m}{q_m}}+|\eta'|^{\left(\frac{1}{2}+j\right)}\right)} \leq$$

$$\leq C\prod_{i=0}^{m-1}\left(\frac{1+|\xi|^{q_i(p_m/q_m)}+|\eta'|^{q_i}}{1+|\xi|^{p_i}+|\eta|^{q_i}}\right)\left(\frac{1+|\xi|^{p_m}+|\eta'|^{q_m}}{1+|\xi|^{p_m}+|\eta|^{q_m}}\right)\prod_{i=m+1}^{n}\left(\frac{1+|\xi|^{p_i}+|\eta'|^{q_i}}{1+|\xi|^{p_i}+|\eta|^{q_i}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{|\eta_s|}{1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|}\right)^j(1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|)^{-1/2} \leq C\prod_{i=0}^{m-1}\left(\frac{1+|\xi|^{p_i}+|\eta'|^{q_i}}{1+|\xi|^{q_i(p_m/q_m)}+|\eta'|^{q_i}}+\right.$$

$$\left.+\frac{|\eta_s|^{q_i}}{1+|\xi|^{q_i(p_m/q_m)}+|\eta'|^{q_i}}\right)^{-1}\left(\frac{|\eta_s|}{1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|}\right)^j\left(1+\frac{|\eta_s|}{1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|}\right)^{-q_m}\cdot$$

$$\cdot(1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|)^{-1/2} \leq C\left(\frac{|\eta_s|}{1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|}\right)^{-\sum_{i=0}^{m-1}q_i}\left(\frac{|\eta_s|}{1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|}\right)^j\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{|\eta_s|}{1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|}\right)^{-q_m}(1+|\xi|^{p_m/p_m}+|\eta'|)^{-1/2} \leq C\left(\frac{|\eta_s|}{1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|}\right)^{j-\sum_{i=0}^{m-1}q_i}\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{|\eta_s|}{1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|}\right)^{-q_m}(1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|)^{-1/2} \leq$$

$$\leq\left(\text{osservato che } j-\sum_{i=0}^{m-1}q_i\geq 0\right)\leq C\left(\frac{|\eta_s|}{1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|}\right)^{j-\sum_{i=0}^{m}q_i}(1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|)^{-1/2},$$

che è la (2).

Per provare la continuità della applicazione considerata, basterà mostrare che

$$(3) \qquad \int h_j^2(\xi, \eta')\left|\widetilde{\frac{\partial^j u}{\partial y_s^j}}(\xi; \eta', 0)\right|^2 d\xi\, d\eta' \leq C\iint k^2(\xi, \eta)\,|\tilde{u}(\xi, \eta)|^2\, d\xi\, d\eta$$

con C costante opportuna.

Ricordato che

$$\widetilde{\frac{\partial^j u(\xi, \eta)}{\partial y_s^j}} = \int e^{-iy_s\eta_s}\,\widetilde{\frac{\partial^j u}{\partial y_s^j}}(\xi; \eta', y_s)\, dy_s,$$

si ha

$$\widetilde{\frac{\partial^j u}{\partial y_s^j}}(\xi; \eta', y_s) = \frac{1}{2\pi}\int e^{iy_s\eta_s}\,\widetilde{\frac{\partial^j u}{\partial y_s^j}}(\xi, \eta)\, d\eta_s$$

e quindi

$$\widetilde{\frac{\partial^j u}{\partial y_s^j}}(\xi\,;\eta',0)=\frac{1}{2\pi}\int\widetilde{\frac{\partial^j u}{\partial y_s^j}}(\xi\,,\eta)\,d\eta_s=\frac{1}{2\pi}\int(-i)^j\,\eta_s^j\,\tilde{u}(\xi\,,\eta)\,d\eta_s\,.$$

Riesce allora

$$h_j^2(\xi\,,\eta')\left|\widetilde{\frac{\partial^j u}{\partial y_s^j}}(\xi\,;\eta',0)\right|^2=\frac{1}{4\pi^2}\left|\int h_j(\xi\,,\eta')\,\eta_s^j\,\tilde{u}(\xi\,,\eta)\,d\eta_s\right|^2=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\left|\int k(\xi\,,\eta)\,\tilde{u}(\xi\,,\eta)\,\frac{h_j(\xi\,,\eta)\,\eta_s^j}{k(\xi\,,\eta)}\,d\eta_s\right|^2\le$$

$$\le\frac{1}{4\pi^2}\int k^2(\xi\,,\eta)\,|\,\tilde{u}(\xi\,,\eta)\,|^2\,d\eta_s\int\frac{h_j^2(\xi\,,\eta')\,|\,\eta_s\,|^{2j}}{k^2(\xi\,,\eta)}\,d\eta_s\,.$$

Si ha poi per la (2)

$$\int\frac{h_j^2(\xi\,,\eta')}{k^2(\xi\,,\eta)}\,|\,\eta_s\,|^2\,d\eta_s\le C\int\left(1+\frac{|\,\eta_s\,|}{1+|\,\xi\,|^{p_m/q_m}+|\,\eta'\,|}\right)^{2j-2\sum\limits_{i=0}^{m}q_i}(1+|\,\xi\,|^{p_m/q_m}+|\,\eta'\,|)^{-1}d\eta_s=$$

$$=\left(\text{posto }\;\bar{\eta}_s=\frac{\eta_s}{1+|\,\xi\,|^{p_m/q_m}+|\,\eta'\,|}\right)=C\int(1+|\,\bar{\eta}_s\,|)^{-2\left(\sum\limits_{i=0}^{m}q_i-j\right)}d\bar{\eta}_s<\infty\,,$$

dato che $\sum\limits_{i=0}^{m}q_i-j\ge 1$; e ciò permette di provare la (3).

Proviamo infine che l'applicazione è *su*. Siano $\varphi_0(t),\cdots,\varphi_\nu(t)$, funzioni della variabile reale t indefinitamente differenziabili e a supporto compatto in R_1, e tali che $\varphi_k(0)=1$ e $D_t^i\varphi_k(0)=0$ per ogni intero positivo i $(k=0,\cdots,\nu)$. Assegnate

$$v_j(x\,,y')\in H_{h_j}(Y)\qquad\qquad(j=0,\cdots,\nu)$$

poniamo

$$\tilde{u}(\xi\,;\eta',y_s)=\sum_{0\le j\le\nu}\tilde{v}_j(\xi\,,\eta')\,\frac{y_s^j}{j!}\,\varphi_j[y_s\,\lambda_j(\xi\,,\eta')]\,,$$

con

$$\lambda_j(\xi\,,\eta')=1+|\,\xi\,|^{p_m/q_m}+|\eta'\,|,\quad\text{per }\sum_{i=0}^{m-1}q_i\le j\le\sum_{i=0}^{m}q_i-1,\qquad m=1,\cdots,n.$$

Mostriamo che la

$$\tilde{u}(\xi\,,\eta)=\int e^{-iy_s\eta_s}\,\tilde{u}(\xi\,;\eta',y_s)\,dy_s$$

è la trasformata di Fourier di $u(x\,,y)\in H_k(R)$.

Si ha

$$\tilde{u}(\xi\,,\eta)=\sum_{0\le j\le\nu}\left(\frac{i^j}{j!}\right)\tilde{v}_j(\xi\,,\eta')\,\frac{d^j}{d\eta_s^j}\,\tilde{\varphi}_j\left(\frac{\eta_s}{\lambda_j}\right)\frac{1}{\lambda_j}=\sum_{0\le j\le\nu}\left(\frac{i^j}{j!}\right)\tilde{v}_j\,\tilde{\varphi}_j^{(j)}\left(\frac{\eta_s}{\lambda_j}\right)\frac{1}{\lambda_j^{j+1}}$$

e quindi

$$\iint k^2(\xi,\eta)\,|\tilde{u}(\xi,\eta)|^2\,d\xi\,d\eta \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\nu} \int |\tilde{v}_j(\xi,\eta')|^2\, h_j^2(\xi,\eta')\,d\xi\,d\eta' \int \frac{k^2(\xi,\eta)}{h_j^2\,\lambda_j^{2(j+1)}} \left|\tilde{\varphi}_j^{(j)}\left(\frac{\eta_s}{\lambda_j}\right)\right|^2 d\eta_s .$$

Per provare che $u(x_i\, y) \in \mathrm{H}_k(\mathrm{R})$ basterà allora verificare che

$$\int \frac{k^2(\xi,\eta)}{h_j^2(\xi,\eta')\,\lambda_j^{2(j+1)}(\xi,\eta')} \left|\tilde{\varphi}_j^{(j)}\left(\frac{\eta_s}{\lambda_j(\eta,\xi')}\right)\right|^2 d\eta_s \leq \mathrm{C}$$

con C costante opportuna (indipendente da (ξ,η')). Si ha per la (1)

$$\frac{k^2(\xi,\eta)}{h_j^2\,\lambda_j^{(1+2j)}} \leq \mathrm{C}\left(1+\frac{|\eta_s|}{1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|}\right)^{2(\nu+1)}$$

e quindi

$$\int \frac{k^2(\xi,\eta)}{h_j^2\,\lambda_j^{(2j+1)}} \left|\tilde{\varphi}_j^{(j)}\left(\frac{\eta_s}{\lambda_j}\right)\right|^2 d\eta_s \leq \mathrm{C}\int\left(1+\frac{|\eta_s|}{1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|}\right)^{2(\nu+1)} \left|\tilde{\varphi}_j^{(j)}\left(\frac{\eta_s}{\lambda_j}\right)\right|^2 \frac{d\eta_s}{\lambda_j} =$$

$$\left(\text{posto}\quad \bar{\eta}_s = \frac{\eta_s}{1+|\xi|^{p_m/q_m}+|\eta'|}\right) = \mathrm{C}\int (1+|\bar{\eta}|)^{2(\nu+1)}\,|\tilde{\varphi}_j^{(j)}(\bar{\eta}_s)|^2\,d\bar{\eta}_s < \infty ;$$

e ciò conclude la verifica.

SUMMARY. — A functional space, which is of interest for the study of boundary value problems for a class of hypoelliptic operators, is considered; trace theorems on coordinate hyperplanes are given.