Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Miron Nicolescu, Ciprian Foiaş

Representation de Poisson et problème de Cauchy pour l'equation de la chaleur. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.5, p. 621–626.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_5_621_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Analisi matematica. — *Représentation de Poisson et problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur.* Nota II di MIRON NICOLESCU et CIPRIAN FOIAȘ, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

A M. le *Professeur Mauro Picone* en témoignage de respectueuse affection à l'occasion de son 80e anniversaire.

Résumé: On montre que les résultats de la Note [I] peuvent être améliorés en utilisant essentiellement la même méthode qu'en [I].

1. Dans la Note [I] nous avons démontré que si $u(x, y)$ est une fonction continue dans la bande fermée

$$-\infty < x < +\infty \quad , \quad 0 \leqq y \leqq \delta \tag{1}$$

vérifiant dans la bande ouverte

$$-\infty < x < +\infty \quad , \quad 0 < y < \delta \tag{2}$$

l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

et vérifie dans (1) la limitation

$$u(x, y) \geqq -\mathrm{M}e^{\mathrm{K}x^2} \tag{4}$$

avec

$$0 \leqq \mathrm{K} < \frac{1}{4\delta}, \tag{5}$$

alors $u(x, y)$ est représentée en chaque point (x, y) de (2) par la formule de Poisson

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} u(\xi, h)\, d\xi, \tag{6}$$

quel que soit h tel que

$$0 \leqq h < y < \delta .$$

De ce résultat on a déduit aisément un théorème d'unicité pour le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur (3), dans la classe des solutions vé-

(*) Nella seduta del 10 aprile 1965.

rifiant une limitation (4) dans une bande quelconque $-\infty < x < +\infty$, $0 \leqq y \leqq Y$. Ce théorème d'unicité qui contient à la fois le théorème de Tihonov (voir [2] et [3]) et celui de Widder [4] a été formulé, ainsi que nous l'avons découvert tout récemment, aussi (même dans un cas plus général, par M. Krzyzariski et P. Besala (voir la conférence [1] du premier au colloque Equadif, Prague 1962). Le but de la présente Note est de prouver que des changements mineurs dans les considérations faites dans notre Note [I] permettent de remplacer la condition (4) par la condition plus faible

$$(4') \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} u^{-}(x, y)\, e^{-Kx^2}\, dx \leqq M < \infty \quad , \quad 0 \leqq y \leqq \delta,$$

où K vérifie (5) et $u^{-}(x, y)$ est la partie négative $u(x, y)$ c'est-à-dire.

$$(7) \qquad u^{-}(x, y) = \max\{-u(x, y), 0\}.$$

Par suite, comme conséquence de la représentation de Poisson (voir le théorème de représentation du n° 2) on obtient aussitôt le suivant

THÉORÈME D'UNICITÉ. – *L'unicité des solution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur* (3) *dans la bande*

$$-\infty < x < +\infty \quad , \quad 0 \leqq y \leqq Y$$

a lieu dans la classe des fonctions vérifiant l'inégalité

$$(4'') \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} u^{-}(x, y)\, e^{-Kx^2}\, dx \leqq M < \infty \quad , \quad 0 \leqq y \leqq Y$$

où K *et* M *sont des constantes positives quelconques.*

Il est visible que si dans la bande $-\infty < x < \infty$, $0 \leqq y \leqq Y$ on a

$$(4''') \qquad u(x, y) \geqq -M_1\, e^{K_1 x^2},$$

alors

$$u^{-}(x, y) \leqq M_1\, e^{K_1 x^2}$$

et par suite (4'') a lieu avec $K > K_1$ quelconque. *Donc la condition* (4'') *contient* (4''') *comme cas particulier.*

2. Nous allons refaire les considérations de la Note [I] en indiquant seulement les compléments nécessaires. Dans ce but, les formules de la Note [I] seront indiquées par leurs numéros suivis par I. Ainsi la formule (8) de la Note [I] sera indiquée par (8 . I) Donc, en conservant les notations du n° 2

de [I] on a la formule

$$(10.1)\quad u(x,y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(x-r)\,u(r,\eta)}{2(y-\eta)}\right]d\eta$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(2R-r-x)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(2R-r-x)\cdot u(r,\eta)}{2(y-\eta)}\right]d\eta$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}}\cdot\frac{(x-R)\cdot u(R,\eta)}{(y-\eta)^{3/2}}\,d\eta$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}}\int_r^R e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}\cdot u(\xi,h)\,d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}}\int_r^R e^{-\frac{(2R-x-\xi)^2}{4(y-h)}}\cdot u(\xi,h)\,d\xi,$$

où

$$-\infty < r < x < R < \infty \quad , \quad 0 \leqq h < y \leqq \delta.$$

Introduisons aussi la partie positive de u:

$$u^+(x,y) = \max\{u(x,y), 0\}.$$

Nous avons

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}}\cdot\frac{(x-R)\,u(R,\eta)}{(y-\eta)^{3/2}}\,d\eta =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}}\cdot\frac{(R-x)\,u^+(R,\eta)}{(y-\eta)^{3/2}}\,d\eta - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}}\cdot\frac{(R-x)\,u^-(R,\eta)}{(y-\eta)^{3/2}}\,d\eta,$$

où la première intégrale est positive pour R assez grand. Comme

$$\int_x^\infty\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}}\cdot\frac{(R-x)\cdot u^-(R,\eta)}{(y-\eta)^{3/2}}\,d\eta\right]dR =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y\int_x^\infty e^{KR^2-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}}\cdot\frac{R-x}{(y-\eta)^{3/2}}\,e^{-KR^2}\,u^-(R,\eta)\,dR\,d\eta \leqq$$

$$C_1\int_h^y\left(\int_x^\infty e^{-KR^2}\,u^-(R,\eta)\,dR\right)d\eta \leqq MC_1\cdot(y-h),$$

où M résulte de (4′) et C_1 est une constante telle que

$$C_1 \geqq \frac{R-x}{(y-\eta)^{3/2}}\,e^{KR^2-\frac{(R-x)^2}{4(y-\eta)}} = \frac{R-x}{(y-\eta)^{3/2}}\,e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}}\cdot e^{R^2\left(-\frac{1-\frac{2x}{R}}{4(y-\eta)}+K\right)},$$

quels que soient $x \leqq R < \infty$, $h \leqq \eta \leqq y$. Ici on a utilise le fait que

$$K < \frac{1}{4\delta} \leqq \frac{1}{4(y-\eta)} .$$

Il en résulte qu'il existe une suite $R_k \to \infty$, telle que

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y e^{-\frac{(x-R_k)^2}{4(y-\eta)}} \cdot \frac{(R_k - x)\cdot u^-(R_k, \eta)}{(y-\eta)^{3/2}} \, d\eta \to 0 .$$

Donc (10. I) devient

$$u(x, y) \geqq -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(x-r)\cdot u(r, \eta)}{2(y-\eta)}\right] d\eta$$

$$+ \limsup_{R_k\to\infty} \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_r^{R_k} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} \cdot \frac{u(\xi, h)}{\sqrt{y-h}} \, d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_r^{R_k} e^{-\frac{(2R_k - x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} \frac{u(\xi, h)}{\sqrt{y-h}} \, d\xi\right] .$$

C'est sous cette forme que la formule (11.I) conserve sa validité.

Comme

$$K < \frac{1}{4(y-\eta)} ,$$

on en déduit aisément (en vertu de (4') que

$$\lim_{R_k\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_r^{R_k} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot \frac{u^-(\xi, h)}{\sqrt{y-h}} \, d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_r^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot \frac{u^-(\xi, h)}{\sqrt{y-h}} \, d\eta$$

existe et que

$$\lim_{R_k\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_r^{R_k} e^{-\frac{(2R_k-x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot \frac{u^-(\xi, h)}{\sqrt{y-h}} \, d\eta =$$

$$\lim_{R_k\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_r^{R_k} e^{-\frac{(2R_k-x-\xi)^2}{4(y-h)} + K\xi^2} \cdot e^{-K\xi^2} u^-(\xi, h) \, d\eta \leqq$$

$$\lim_{R_k\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} e^{-\frac{(R_k-x)^2}{4(y-h)} + KR_k^2} \int_r^{\infty} e^{-K\xi^2} u^-(\xi, h) \, d\eta = 0 .$$

Ainsi

$$u(x, y) \geqq -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(x-r)\cdot u(r, \eta)}{2(y-\eta)}\right] d\eta$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_r^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u^-(\xi, h) + \limsup_{R_k\to\infty} F(u^+) ,$$

où

$$\mathrm{F}(u^+) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_r^{\mathrm{R}_k} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} - e^{-\frac{(2\mathrm{R}_k - x - \xi)^2}{4(y-h)}} \right] u^+(\xi, h)\, d\xi .$$

En répétant maintenant les considérations qui nous ont conduit dans la Note [I] de (12.I) à (13.I), sans aucun changement, on arrive à cette dernière formule

$$(13.\mathrm{I}) \quad u(x, y) \geqq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}} \left[\frac{1}{\sqrt{y-h}} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi = r} - \frac{(x-r)\, u(r, \eta)}{2(y-\eta)^{3/2}} \right] d\eta$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_r^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u(\xi, h)\, d\xi ,$$

où la dernière intégrale converge absolument.

On n'a maintenant qu'à réproduire les passages à la limite du n° 3 de [1] non pas pour $\mathrm{R} \to \infty$ arbitrairement, mais tout comme auparavant pour une suite $\mathrm{R}_k \to \infty$ convenablement choisie. On arrive ainsi de (16.1) à (17.1) et par suite à (18.1), c'est-à-dire

$$(18.1) \qquad u(x, y) \geqq \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u(\xi, h)\, d\xi ,$$

valable pour

$$-\infty < x < \infty \quad , \quad 0 \leq h < y \leqq \delta ,$$

Dans le cas $x = 0$, $y = \delta$ on obtient en utilisant aussi (4')

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi(\delta - h)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4(\delta - h)}} \cdot |u(\xi, h)|\, d\xi \leqq u(0, \delta) + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4(\delta-h)}} \cdot u^-(\xi, h)\, d\xi \leqq$$

$$u(0, \delta) + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2\left(\frac{1}{4(\delta-h)} - \mathrm{K}\right)} \cdot e^{-\mathrm{K}\xi^2} \cdot u^-(\xi, h)\, d\xi \leqq u(0, \delta) + 2\mathrm{M} ,$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4(\delta-h)}} \cdot |u(\xi, h)|\, d\xi < \mathrm{C} ,$$

ce qui n'est autre chose que la formule (19.1). Comme nous l'avons indiqué dans les n° 4 et 5 de [1], cette limitation entraîne

$$(8) \qquad u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u(\xi, h)\, d\xi .$$

Ainsi on aboutit à notre théorème de représentation indiqué au début:

THÉORÈME II (théorème de représentation). – *Soit u* (x, y) *une solution de l'équation de la chaleur* (3) *dans la bande* (2), *continue dans la bande fermée* (1), *vérifiant dans cette bande l'inégalité* (4') *où* $K < \frac{1}{4\delta}$. *Alors pour tout* $-\infty < x < \infty$, $0 \leqq h < y < \delta$ *on a la formule de représentation de Poisson* (8).

Concernant le théorème d'unicité énoncé au commencement on n'a qu'à réproduire le n° 6 de [1], en utilisant cette fois-ci le théorème II ci-dessus au lieu du théorème I de [1].

LITTÉRATURE.

[1] M. NICOLESCU–C. FOIAŞ, *Représentation de Poisson et le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », ...

[1] M. KRZYZAŃSKI, *Solutions de l'équation linéaire du type parabolique du second ordre définies dans un domaine non borné*, Résumés des communications du colloque Equadif de Prague, août 1962, pp. 14–17.

[2] M. NICOLESCU, *Sur l'équation de la chaleur*, « Commentarii Math. Helv. », *10*, 3–17 (1932).

[3] A. TIHONOV, *Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur*, « Mat. Sbornik », *42*, 199 216 (1935).

[4] D. V. WIDDER, *Positive temperatures in an infinite rod*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *55*, 85–95 (1954).