Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Demetrio Mangeron, A. F. Šestopal

Sulle funzioni di Green concernenti i poligoni rettilinei semplicemente connessi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.5, p. 605–609.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_5_605_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sulle funzioni di Green concernenti i poligoni rettilinei semplicemente connessi.* Nota di DEMETRIO MANGERON e A. F. ŠESTOPAL, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

A Mauro Picone nel Suo 80° compleanno.

1. In una Nota lincea recente [1] gli Autori hanno studiato l'analisi spettrale delle piastre triangolari tramite applicazione degli sviluppi delle funzioni di Green spettanti agli operatori lineari alle derivate parziali – anche non ellittici – [2], [3], in serie di funzioni fondamentali.

In questa Nota si dà la rappresentazione delle funzioni di Green relative ai domini poligonali rettilinei semplicemente connessi tenendovisi conto delle applicazioni ulteriori relative alle inversioni degli integrali di Schwarz-Christoffel tuttora in stampa [4].

2. Enunciamo anzitutto i seguenti lemmi.

LEMMA 1. – *Se* $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \pm e^{\pm i(\pi/3)}$, *l'eguaglianza*

$$(1) \quad \wp'(u, \omega_1, \omega_2) - \wp'(v, \omega_1, \omega_2) = C(v) \frac{\theta_1\left(\frac{u-v}{2\omega_1}, \tau\right)\theta_1\left(\frac{u+ve^{i(\pi/3)}}{2\omega_1}, \tau\right)\theta_1\left(\frac{u+ve^{-i(\pi/3)}}{2\omega_1}, \tau\right)}{\theta_1^3\left(\frac{u}{2\omega_1}, \tau\right)}$$

è valida per due valori arbitrari degli argomenti u e v.

Nella formola (1) si è posto

$$(2) \qquad C(v) = \frac{\pi^3 \theta_1'^3(0, \tau)}{4\omega_1^3 \theta_1\left(\frac{v}{2\omega_1}, \tau\right)\theta_1\left(\frac{ve^{i(\pi/3)}}{2\omega_1}, \tau\right)\theta_1\left(\frac{ve^{-i(\pi/3)}}{2\omega_1}, \tau\right)},$$

$2\omega_1$ e $2\omega_2$ essendo i periodi della classica funzione ellittica $\wp(z, \omega_1, \omega_2)$ di Weierstrass (1).

(*) Nella seduta del 14 novembre 1964.

(1) Le funzioni Theta, pur esse classiche, si definiscono per la variabile complessa v ed un parametro $\varkappa$ essendo $\operatorname{Re}\varkappa > 0$ tramite i seguenti sviluppi

$$\theta_1(v, \varkappa) = 2q^{1/4}(\sin \pi v - q^2 \sin 3\pi v + q^6 \sin 5\pi v - \cdots) = i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)\pi vi},$$

LEMMA 2. – *Per ogni numero complesso π avente la parte pur immaginaria non negativa e per ogni $z = u/\omega_1$ hanno luogo le formole*

$$(3)\qquad \frac{\theta_1(z,\tau)\,\theta_3(z,\tau)}{\theta_1\left(\frac{2z}{\tau-1},-\frac{2\tau}{\tau-1}\right)} = \frac{1}{\tau-1}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\,e^{-i\frac{2\pi}{\tau-1}z^2}\,\frac{\theta_3\left(0,-\frac{\tau}{\tau-1}\right)\theta_0\left(0,-\frac{\tau}{\tau-1}\right)}{\theta_0\left(0,-\frac{2\pi}{\tau-1}\right)},$$

$$(4)\qquad \frac{\theta_0(z,\tau)\,\theta_2(z,\tau)}{\theta_0\left(\frac{2z}{\tau-1},-\frac{2\tau}{\tau-1}\right)} = -\frac{1}{\tau-1}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}\,e^{-i\frac{2\pi}{\tau-1}z^2}\,\frac{\theta_3\left(0,-\frac{\tau}{\tau-1}\right)\theta_0\left(0,-\frac{\tau}{\tau-1}\right)}{\theta_0\left(0,-\frac{2\tau}{\tau-1}\right)},$$

ove come più sopra per le θ–funzioni si sono adoperate le notazioni $\theta_i(z,q)$ e $\theta_i(z,\tau)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, essendo q un numero complesso costante di modulo minore di uno e $\tau = \frac{\ln q}{\pi i}$.

3. I lemmi di cui sopra conducono alle nuove espressioni delle funzioni di Green assai utili nelle applicazioni ove governa nelle schematizzazioni matematiche come strumento la teoria delle funzioni di variabile complessa.

$$\theta_2(v,\varkappa) = 2\,q^{1/4}(\cos\pi v + q^2\cos 3\pi v + q^6\cos 5\pi v + \cdots) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)\pi v i},$$

$$\theta_3(v,\varkappa) = 1 + 2\,(q\cos 2\pi v + q^4\cos 4\pi v + q^9\cos 6\pi v + \cdots) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2n\pi v i},$$

$$\theta_4(v,\varkappa) = 1 - 2\,(q\cos 2\pi v - q^4\cos 4\pi v + q^9\cos 6\pi v - \cdots) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi v i},$$

ove $q = e^{-\pi\varkappa}$, allorché col $q^{1/4}$ si sottintende il valore univocamente determinato $e^{-(1/4)\pi\varkappa}$; si può prendere anche $q = e^{i\pi\tau}$, ove si è posto $\tau = \tau_1 + i\tau_2 = i\varkappa$ $(\tau_2 > 0)$.

Nel caso in cui il parametro $\varkappa$ è prefissato, invece di $\theta_n(v,\varkappa)$ si scrive brevemente $\theta_n(v)$. La funzione $\theta_4(v)$ si nota pure con $\theta(v)$ oppure $\theta_0(v)$. Le funzioni Theta sono funzioni trascendenti intere. Le loro drivate logaritmiche per rapporto a v sono

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{d\ln\theta_3(v)}{dv} \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{d\ln\theta_4(v)}{dv} \end{array}\right\} = \mp\frac{\sin 2\pi v}{\operatorname{sh}\pi\varkappa} + \frac{\sin 4\pi v}{\operatorname{sh}2\pi\varkappa} \mp \frac{\sin 6\pi v}{\operatorname{sh}3\pi\varkappa} + \cdots,$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{d\ln\theta_2}{dv} + \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\pi v \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{d\ln\theta_1}{dv} - \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\pi v \end{array}\right\} = \mp\frac{\sin 2\pi v}{\operatorname{sh}\pi\varkappa} + q^2\frac{\sin 4\pi v}{\operatorname{sh}2\pi\varkappa} \mp q^3\frac{\sin 6\pi v}{\operatorname{sh}3\pi\varkappa} + \cdots.$$

Per varie proprietà delle funzioni Theta vedasi [9], allorché per i valori delle funzioni $\theta_1'(0)$, $\theta_0(0)$, $\theta_2(0)$, $\theta_3(0)$, $\frac{\theta_1'''(0)}{\theta_1'(0)}$, $\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)}$, $\frac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)}$, $\frac{\theta_0''(0)}{\theta_0(0)}$ si utilizzano di solito le tabelle di KEIICHI HAYASHI [10] oppure quelle di NAGAOKA e SAKURAI [11].

Così, ad esempio, tenendo conto del fatto, dimostrato dagli Autori nella loro Nota [5], che la parte reale della funzione di Green W (P, Q) spettante ad un triangolo equilatero possiede la forma

$$(5)\qquad W(P,Q) = -\frac{8}{9a^2\sqrt{3}}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{1+\cos(n+k)\pi}{\frac{4\pi^2}{a^2}\left(\frac{n^2}{9}+\frac{k^2}{3}\right)}\left[\varphi_{kn}^{c}(P)\,\varphi_{kn}^{c}(Q)+\varphi_{kn}^{s}(P)\,\varphi_{kn}^{s}(Q)\right],$$

ove P e Q sono punti di coordinate (x_1, x_2) e (ξ_1, ξ_2) rispettivamente, a è la lunghezza del lato di detto triangolo, mentre le $\varphi_{kn}^{c}(P)$ e $\varphi_{kn}^{s}(P)$ si determinano secondo le formole

$$(6)\qquad \varphi_{kn}^{c}(P) = \sin\frac{2k\pi}{a\sqrt{3}}x_2\cos\frac{2n\pi}{3a}x_1 - \sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3}+x_2)\cos\frac{n\pi}{3a}(x_2\sqrt{3}-x_1)$$
$$+\sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3}-x_2)\cos\frac{n\pi}{3a}(x_1+x_2\sqrt{3});$$

$$(7)\qquad \varphi_{kn}^{s}(P) = \sin\frac{2n\pi}{a\sqrt{3}}x_2\sin\frac{2n\pi}{3a}x_1 - \sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3}+x_2)\sin\frac{n\pi}{3a}(x_2\sqrt{3}-x_1)$$
$$-\sin\frac{k\pi}{a\sqrt{3}}(x_1\sqrt{3}-x_2)\sin\frac{n\pi}{3a}(x_1+x_2\sqrt{3}),$$

si ricava per la W (P, Q) la nuova forma seguente:

$$(8)\qquad W(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\wp'(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'(\zeta,\omega_1,\omega_2)}{\wp'(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'(\bar{\zeta},\omega_1,\omega_2)}\right|,$$

$z = x_1 + ix_2$, $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$.

La funzione di Green U (P, Q) spettante ad un triangolo che si ottiene da un triangolo equilatero per dimezzazione di quest'ultimo è data dalla formola

$$(9)\qquad U(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\left\{\ln\left|\frac{\wp'(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'(\zeta,\omega_1,\omega_2)}{\wp'(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'(\bar{\zeta},\omega_1,\omega_2)}\right| - \ln\left|\frac{\wp'(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'(\zeta^*,\omega_1,\omega_2)}{\wp'(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'(\bar{\zeta}^*,\omega_1,\omega_2)}\right|\right\},$$

ove si è posto $\zeta^* = \bar{\zeta}e^{i(\pi/3)}$. La (9) si trasforma poscia in

$$(10)\qquad U(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\wp'^2(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'^2(\zeta,\omega_1,\omega_2)}{\wp'^2(z,\omega_1,\omega_2)-\wp'^2(\bar{\zeta},\omega_1,\omega_2)}\right|.$$

La funzione di Green K (P, Q) spettante ad un rettangolo è data dalla formola

$$(11)\qquad K(P,Q) = -\frac{4}{ab}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi}{a}x_1\sin\frac{k\pi}{a}\xi_1\sin\frac{n\pi}{b}x_2\sin\frac{n\pi}{b}\xi_2}{\pi^2\left(\frac{k^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)} =$$
$$\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left[\ln\frac{\theta_1\left(\frac{z-\zeta}{2a},q\right)\theta_1\left(\frac{z+\zeta}{2a},q\right)}{\theta_1\left(\frac{z-\bar{\zeta}}{2a},q\right)\theta_1\left(\frac{z+\bar{\zeta}}{2a},q\right)}\right],$$

ove si è posto $q = e^{-\pi(b/a)}$, $z = x_1 + x_2$, $\zeta = \xi_1 + i\,\xi_2$.

La funzione di Green spettante ad un triangolo rettangolo isoscele, V (P,Q) si ottiene ponendovi innanzitutto nella (11) $a = b$. Si ottiene per conseguenza in un primo tempo

$$K(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\ln \frac{\wp(z, \omega_1', \omega_2') - \wp(\zeta, \omega_1', \omega_2')}{\wp(z, \omega_1', \omega_2') - \wp(\bar{\zeta}, \omega_1', \omega_2')} \right], \tag{12}$$

ove si è fatto notare $\omega_1' = a$, $\omega_2' = ia$, $\tau = i$. Tenendo conto dalla formola di omogeneità per la funzione $\wp$ nel caso in cui il secondo invariante g_3 è uguale a 0, è cioè dalla formola

$$\wp(\pm iz, g_2, 0) = -\wp(z, g_2, 0) \tag{13}$$

si ottiene dalle (12) e (13) per la funzione di Green V (P, Q) di cui sopra l'espressione

$$V(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\wp^2(z, \omega_1', \omega_2') - \wp^2(\zeta, \omega_1', \omega_2')}{\wp^2(z, \omega_1', \omega_2') - \wp^2(\bar{\zeta}, \omega_1', \omega_2')} \right|. \tag{14}$$

4. I risultati conseguiti possono essere collegati con alcuni recenti lavori dovuti al M. Marden, P. F. Filčakov ed altri ancora [6], [7], relativi, rispettivamente, allo studio dei punti critici delle combinazioni lineari delle funzioni di Green e della determinazione delle costanti degli integrali di Schwarz–Christoffel tramite serie di potenze generalizzate. Le formule di cui sopra si possono estendere, mettendovi alla base lo strumento della teoria delle funzioni di variabile complessa, cfr., per esempio, M. Picone [8], ed utilizzando il principio di simmetria di Schwarz, alla determinazione delle rappresentazioni conforme su di un semipiano di una vasta serie di domini poligonali, costituiti dai triangoli equilateri e dai triangoli che si ottengono in seguito alla dimezzazione dei triangoli equilateri. Fermandoci, additiamo la possibilità di ottenere, senz'altro, con i mezzi di cui sopra, la funzione che fa rappresentare su di un semipiano un rombo coll'angolo acuto uguale a $\pi/3$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] D. MANGERON, A. F. ŠESTOPAL, *Sul problema di analisi spettrale delle piastre triangolari*, «Accad. Naz. dei Lincei. Rend.», Cl. Sci. fis., mat. e nat., ser. 8ª, XXXVI (1), 37–42 (1964).

[2] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra una classe di problemi al contorno non omogenei per alcuni classi di equazioni integro–differenziali a derivate totali nel senso di Picone*, «Accad. Naz. dei Lincei. Rend.», Cl. Sci. fis., mat. e nat., ser. 8ª, XXXIII (1–2), 49–54 (1962).

[3] D. MANGERON, *Risolubilità e struttura delle soluzioni dei problemi al contorno mon omogenei di Goursat e di Dirichlet per le equazioni integro–differenziali a derivate totali d'ordine superiore*, «Accad. Naz. dei Lincei. Rend.» Cl. Sci. fis., mat. e nat., ser. 8°, XXXIV (2), 118–122 (1963).

[4] D. MANGERON, L. MATEESCU, A. F. ŠESTOPAL, *Vklad v zadaci primenenia funktzii Green–a. II. Sluceai odnoznacinosti obrascenia integrala Schwarz–a–Christoffel–a dlia odnosviaznyh preamolineinyh mnogougol'nikov* (*Contributo ai problemi concernenti le applicazioni delle funzioni di Green. – II. Casi di inversione univoca degli integrali di Schwarz–Christoffel concernenti i domini poligonali rettilinei semplicemente connessi*), « Revue Roumaine Math. pures et appl. », Acad. R.P.R. (in stampa).

[5] D. MANGERON, A. F. ŠESTOPAL, *Vklad v zadaci primenenia funktzii Green–a.* – I. *Razloženie funktzii Green–a lineinyh differentzial'nyh operatorov v častnyh proizvodnyh po fundamental'nym funktziam* (*Contributo ai problemi concernenti le applicazioni delle funzioni di Green.* – I. *Sviluppi delle funzioni di Green relativi agli operatori lineari differenziali alle derivate parziali in serie di funzioni fondamentali*), « Revue Roumaine Math. pures et appl. », Acad. R.P.R. *A Miron Nicolescu nel suo 60° compleanno*. IX, 13 pp. (1964).

[6] M. MARDEN, *The critical points of a linear combination of Green's functions*, « Trans. Amer. Math. Soc. », *107*, 3, 369–381 (1963).

[7] P. F. FILČAKOV, *Opredelenie konstant integrala Christoffe'a–Schwarz–a pri pomosci stepennyh readov* (*Determinazione delle costanti dell'integrale di Schwarz–Christoffel tramite serie di potenze generalizzate*). Nel volume *Nekotorye Problemy matematiki e mehaniki*, Novosibirsk, Sib. otd. Akad. Nauk SSSR, 224–226 (1961).

[8] M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Napoli 1940.

[9] E. JANKE, F. EMDE, F. LÖSCH, *Tafeln höherer Funktionen*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1960, pp. 130–143.

[10] K. HAYASHI, *Tafeln der Besselschen, Theta–, Kugel–und anderer Funktionen*. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1930, pp. 83–104.

[11] M. NAGAOKA, E. SAKURAI, *Tables of Thetafunctions*, OHM, Tokyo 1922.