Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gianni Astarita

Decadimento della scia dietro una lastra piana in un fluido a legge di potenza

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.4, p. 511–516.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_4_511_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Chimica (Principi di Ingegneria Chimica). — *Decadimento della scia dietro una lastra piana in un fluido a legge di potenza.* Nota di GIANNI ASTARITA, presentata (*) dal Corrisp. G. MALQUORI.

INTRODUZIONE.

L'estensione della trattazione analitica di problemi fluodinamici al caso di liquidi a legge di potenza costituisce un valido contributo alla comprensione dei fenomeni fluodinamici in liquidi non-newtoniani. Tale comprensione è di particolare interesse per l'ingegnere chimico, in considerazione della grande varietà di sostanze, comunemente trattate nella industria chimica, il cui comportamento reologico è non-newtoniano.

In questa Nota viene fornita la soluzione asintotica del problema del decadimento viscoso della scia dietro una lastra piana, ossia del problema di Goldstein.

L'interesse che tale problema specifico presenta per l'ingegnere chimico risiede nella applicabilità della soluzione allo studio dei fenomeni di imbocco in getti laminari, e dell'influenza dei medesimi sui processi di trasporto di materia, come posto in risalto da Scriven [1].

TEORIA.

Si consideri una lastra piana, di lunghezza l e larghezza infinita, immersa in un fluido in moto rispetto alla lastra stessa. Sia u_∞ la velocità del fluido, parallela alla direzione in cui la lastra ha dimensione finita, a distanza infinita dalla stessa. Si supponga che il fluido sia caratterizzato dalla seguente equazione reologica di stato:

$$\tau = -m \left\{ \left| \sqrt{\frac{1}{2} \Delta : \Delta} \right|^{n-1} \right\} \Delta \tag{1}$$

e sia incompressibile.

Sia x la direzione del moto, ed y la direzione del trasporto di quantità di moto (ortogonale alla lastra). Le due equazioni, di continuità e di bilancio della quantità di moto, potranno scriversi:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 . \tag{3}$$

(*) Nella seduta del 13 marzo 1965.

Sostituendo per τ_{xy} il valore ricavato dalla (1), e definendo le variabili adimensionali U, V, ξ ed η come usuale nei problemi di strato limite in liquidi a legge di potenza (vedi la Nomenclatura), le equazioni (2) e (3) si riducono a:

$$U\frac{\partial U}{\partial \xi} + V\frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left|\frac{\partial U}{\partial \eta}\right|^{n-1}\frac{\partial U}{\partial \eta}\right] \tag{4}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 . \tag{5}$$

Limitando l'analisi alla sola soluzione asintotica, valida per $\xi \to \infty$, è conveniente definire un « difetto di velocità », $\bar{U}$, come:

$$\bar{U} = 1 - U \tag{6}$$

Nella soluzione asintotica, può considerarsi $\bar{U} \ll 1$, sicché i termini in $\bar{U}$ di grado qualunque possono trascurarsi rispetto ai termini di grado inferiore.

Con tale semplificazione, la (4) si riduce a:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left|\frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta}\right|^{n-1}\frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta}\right] . \tag{7}$$

Una trasformazione di Blasius riduce la (7) ad una equazione differenziale alle derivate totali, nella quale $\bar{U}$ è considerata funzione della variabile t:

$$\bar{U} = \xi^{-1/2n} f(t) \tag{8}$$

dove:

$$t = \eta\, \xi^{-1/2n} . \tag{9}$$

L'esponente $-1/2\,n$ è lo stesso nelle equazioni (8) e (9), in modo da soddisfare la condizione fisicamente necessaria che l'integrale della quantità di moto lungo l'asse y sia indipendente dal valore di x.

Sostituendo le (8) e (9) nella (7), si ha:

$$2\,n^2\left(\frac{df}{dt}\right)^{n-1}\frac{d^2 f}{dt^2} + t\frac{df}{dt} + f = 0 \tag{10}$$

che, per $n = 1$, si riduce alla ben nota equazione di Goldstein [2, 3, 4] valida per fluidi newtoniani.

La condizione al limite da rispettare è:

$$t = 0 \quad , \quad df/dt = 0 . \tag{11}$$

Poiché la (10) è una equazione differenziale del secondo ordine, la sola condizione (11) ne determinerà l'integrale a meno di una costante arbitraria. Il valore di tale costante dovrà determinarsi in base alla condizione che l'integrale del flusso della quantità di moto differisca da quello della corrente indisturbata per un ammontare costante e pari all'attrito esercitato dalla lastra.

L'equazione (10) può scriversi nella forma:

$$2\,n\cdot\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{df}{dt}\right)^n\right]+\frac{d}{dt}(ft)=0 \tag{12}$$

sì che, per semplice integrazione, e tenendo conto della (11), si giunge alla relazione:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^n+\frac{tf}{2\,n}=0\,. \tag{13}$$

Prima di procedere alla seconda integrazione, il caso dei fluidi newtoniani ($n=1$) va scartato. Per $n\neq 1$, l'integrazione della (13) fornisce:

$$f(t)=\left[B_n-\frac{n-1}{n+1}\left(\frac{1}{2\,n}\right)^{1/n}t^{(n+1)/n}\right]^{n/(n-1)}. \tag{14}$$

L'equazione (14) si riduce, per $n\to 1$, alla ben nota equazione ottenuta da Goldstein per liquidi newtoniani:

$$f_{n=1}(t)=\text{cost}\cdot\exp\left(-t^2/4\right). \tag{15}$$

Si noti che, per $n<1$, la $f(t)$ tende a zero per $t\to\infty$ (come fisicamente evidente) quale che sia il valore della costante di integrazione. Per $n>1$, esisterà sempre un valore *finito* di t per cui $f=0$, quale che sia il valore di B_n. Il fatto che, in fluidi dilatanti ($n>1$), il valore della velocità del campo esterno venga raggiunto non asintoticamente è stato già osservato nella trattazione di altri problemi di strato limite in fluidi a legge di potenza (5).

TABELLA I.

Valori numerici di C_n *e di* $B_n^{n/n-1}$.

n	C_n	$B_n^{n/(n-1)}$
0,05	1,017	0,361
0,10	0,9690	0,345
0,20	0,8725	0,313
0,30	0,7325	0,310
0,50	0,5755	0,318
1,0	0,33206	0,375
1,5	0,2189	0,409
2,0	0,1612	0,433

Il valore della costante B_n va determinato imponendo che l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho\,(u_\infty^2 - u^2)\,dx$$

sia equale all'attrito esercitato dalla lastra per unità di spessore, $\bar{\tau}_0\,l$. Il valore locale dell'attrito alla parete, τ_0, è stato calcolato da Acrivos (5), e risulta:

$$\frac{\tau_0}{\rho\,u_\infty^2} = C_n \cdot \mathrm{Re}_x^{-1/(n+1)} \tag{16}$$

per cui il valor medio $\bar{\tau}_0$ risulta dato da:

$$\bar{\tau}_0 = \rho\,u_\infty^2\,(n+1)\,C_n \left[\frac{\rho\,u_\infty^{2-n}\,l^n}{m}\right]^{-\frac{1}{n+1}} . \tag{17}$$

I valori del coefficiente C_n sono riportati in Tabella I. Tali valori sono stati desunti dalla Nota [5], ad eccezione del valore $C_{0,2}$, per il quale Acrivos fornisce un dato lievemente erroneo.

TABELLA II.

Espressioni per $\bar{U}$ quando algebriche.

$n = 0{,}5$	$\bar{U} = \dfrac{0{,}318\,\xi^{-1}}{1 + 0{,}106\,t^3}$	
$n = 1{,}0$	$\bar{U} = 0{,}375\,\xi^{-1/2}$	$\exp(-t^2/4)$
$n = 1{,}5$	$\bar{U} = 0{,}409\,\xi^{-1/3}$	$(1 - 0{,}130\,t^{5/3})^3$
$n = 2{,}0$	$\bar{U} = 0{,}433\,\xi^{-1/4}$	$(1 - 0{,}253\,t^{3/2})^2$

Pertanto, le equazioni che forniscono i valori di B_n risultano, trascurando al solito i termini in $\bar{U}^2$, dati dalle seguenti relazioni:

per $n < 1$,

$$(n+1)\,C_n = \int_0^\infty \frac{dt}{\left[B_n + \dfrac{1-n}{1+n}\left(\dfrac{1}{2n}\right)^{1/n} t^{(n+1)/n}\right]^{n/(1-n)}} \tag{18}$$

per $n > 1$,

$$(n+1)\,C_n = \int_0^{\left[\frac{n+1}{n-1}(2n)^{1/n} B_n\right]^{n/(n-1)}} \left[B_n - \frac{n-1}{n+1}\left(\frac{1}{2n}\right)^{1/n} t^{(n+1)/n}\right]^{n/(n-1)} dt . \tag{19}$$

Il valore del difetto di velocità al piano di simmetria risulta dato da:

$$\bar{U}_{\eta=0} = \xi^{-1/2n}\,B_n^{n/(n-1)} . \tag{20}$$

La valutazione del valore numerico delle costanti di integrazione dalle equazioni (18) e (19) è un procedimento notevolmente laborioso. Fortunatamente, espandendo in serie l'integrando, si ottiene una valutazione che, per valori di n non molto bassi ($n > 0{,}1$), converge molto rapidamente. Per alcuni valori particolari di n (0,5 ; 1,5 ; 2,0 ;) le equazioni (18) e (19) divengono algebriche. Le espressioni corrispondenti sono riportate in Tabella II. Valori numerici delle costanti $B_n^{n/n-1}$ sono riportati nell'ultima colonna della Tabella I.

CARATTERISTICHE DELLA SOLUZIONE.

L'equazione (20) mostra come il decadimento della scia è tanto più rapido per quanto minore è il valore di n: in confronto ai liquidi newtoniani, i liquidi pseudoplastici presentano scie più corte, i liquidi dilatanti scie più lunghe.

L'equazione (14) mostra che lo « spessore » dello strato limite (o la « larghezza » della scia) è tanto maggiore per quanto minore è il valore di n.

Va notato che solo per fluidi dilatanti può parlarsi di larghezza della scia in senso stretto; per fluidi newtoniani e pseudoplastici, occorrerà ricorrere alla usuale definizione di spessore dello strato limite come valore di y per cui la velocità u è il 99% del valore u_∞. Rispetto ai liquidi newtoniani, i liquidi pseudoplastici presentano scie più corte e più larghe, i fluidi dilatanti scie più lunghe e più strette.

Il fenomeno di accorciamento e ispessimento dello strato limite in fluidi pseudoplastici (e viceversa in fluidi dilatanti) è stato riscontrato anche per altri problemi (5), e sembra quindi doversi ascrivere in generale alle caratteristiche reologiche di tali fluidi.

NOMENCLATURA.

B_n — Costante di integrazione.
C_n — Costante nella equazione (16).
f — Funzione definita dalla equazione (8).
l — Lunghezza assiale della lastra piana, cm.
m — Indice di consistenza, g cm sec^{n-2}.
n — Indice di flusso, definito dalla equazione (1).
t — Variabile ausiliaria, definita dalla equazione (9).
u — Velocità in direzione parallela alla lastra, cm sec^{-1}.
u_∞ — Valore di u per $y \to \infty$, cm sec^{-1}.
U = u/u_∞.
$\bar{U}$ = $1 - U = (u_\infty - u)/u_\infty$.
v — Velocità in direzione normale alla lastra, cm sec^{-1}.
V = $[\rho\, u_\infty^{2-n}\, l^n/m]^{1/(1+n)} \cdot [v/u_\infty]$.
x — Distanza dall'orlo della lastra piana, cm.
y — Distanza dal piano di simmetria, cm.
Re_x — Numero di Reynolds basato sulla distanza dall'orlo di imbocco della lastra.
$\triangle$ — Tensore dei gradienti di velocità, sec^{-1}.

η = $[\rho\, u_\infty^{2-n}\, l^n/m]^{1/(1+n)} \cdot y/l$.
ξ = x/l.
ρ — Densità del fluido, g cm^{-3}.
τ — Tensore di sforzi interni, g cm sec^{-2}.
τ_{xy} — Componente di τ, g cm sec^{-2}.
τ_0 — Valore di τ_{xy} sulla superficie della lastra, g cm sec^{-2}.
$\bar{\tau}_0$ — Valore medio di τ_0 lungo tutta la lastra, g cm sec^{-2}.

LETTERATURA.

[1] L. E. SCRIVEN, Ph. D. Thesis, University of Delaware, 1958.
[2] S. GOLDSTEIN, « Proc. Cambr. Phil. Soc. », *26* (1930).
[3] S. GOLDSTEIN, « Proc. Roy. Soc. London », *A142*, 545 (1933).
[4] H. SCHLICHTING, *Boundary layer theory*, Mc–Graw Hill, New York 1960, p. 160.
[5] A. ACRIVOS, M. J. SHAH, E. E. PETERSEN, « Am. Inst. Chem. Engrs. J. », *6*, 312 (1960).