ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

MARCELLO BRUNI

Relazioni tra metrica euclidea ed hermitiana in uno spazio vettoriale quaternionale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 38 (1965), n.4, p. 488–491.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_4_488_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Relazioni tra metrica euclidea ed hermitiana in uno spazio vettoriale quaternionale* (*). Nota di MARCELLO BRUNI, presentata (**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

1. In questa Nota si dà indicazione rapida dei principali risultati che appariranno per esteso in un lavoro di prossima pubblicazione, concernente i rapporti che intercorrono tra le metriche euclidea ed hermitiana nello spazio vettoriale quaternionale n -dimensionale $\mathbf{Q}^n$.

Il lavoro si svolge in un ordine di idee aperto da E. Martinelli per il caso quaternionale [6], [7], e tende a generalizzare varie proprietà note nel caso complesso, dovute al Martinelli stesso [4], [5] e al Rizza [8], [9], [10].

2. Osserviamo preliminarmente che nell'algebra $\mathbf{Q}$ degli ordinari quaternioni su $\mathbf{R}^{(1)}$ esistono infinite basi tutte soddisfacenti alla ben nota tabella moltiplicativa.

Le nozioni che introdurremo avranno significato invariante rispetto ad un qualunque cambiamento di tali basi.

3. L'insieme $\mathbf{Q}^n$ può pensarsi come spazio vettoriale quaternionale destro. Tra $\mathbf{Q}^n$ ed $\mathbf{R}^{4n}$ si pone in modo ben noto una biiezione che consente di pensare $\mathbf{Q}^n$ identificato ad $\mathbf{R}^{4n}$ (nei riguardi delle strutture di spazi vettoriali su $\mathbf{R}$). I sottospazi di $\mathbf{R}^{4n}$ di dimensione 4 (su $\mathbf{R}$) che si identificano ai sottospazi di $\mathbf{Q}^n$ di dimensione 1 (su $\mathbf{Q}$), si diranno *caratteristici*.

Per ogni vettore di $\mathbf{R}^{4n}$ passa uno ed un solo sottospazio caratteristico.

4. In $\mathbf{Q}^n$ si consideri la metrica indotta dal *prodotto hermitiano*:

$$(4.1) \quad L \cdot M = \sum_{\alpha=1}^n \bar{L}^{\alpha} M^{\alpha}$$

dove L^{α}, M^{α} sono le componenti quaternionali dei vettori L, M di $\mathbf{Q}^n$, ed $\bar{L}^{\alpha}$ è il quaternionone coniugato di L^{α} .

Analogamente consideriamo $\mathbf{R}^{4n}$ come spazio euclideo E_{4n} la cui metrica sia definita dal *prodotto scalare*:

$$(4.2) \quad L \times M = \sum_{k=1}^{4n} \lambda^k \mu^k$$

dove le λ^k, μ^k sono le componenti reali di L, M .

I prodotti scalare ed hermitiano risultano collegati dalla:

$$(4.3) \quad L \times M = \operatorname{Re} (L \cdot M) \quad (2).$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 1 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1964-65.

(**) Nella seduta del 10 aprile 1965.

(1) $\mathbf{R}$ e $\mathbf{C}$ sono risp. i campi reale e complesso.

(2) Con $\operatorname{Re} q$ e $\operatorname{Im} q$ ($q \in \mathbf{Q}$) indichiamo risp. la parte reale e la parte immaginaria di q .

Introdotte in $\mathbf{R}^{4n}$ le biiezioni (rotazioni di E_{4n}):

$$(4.4) \quad \mathfrak{I} : L \rightarrow Li \quad , \quad \mathfrak{J} : L \rightarrow Lj \quad , \quad \mathfrak{K} : L \rightarrow Lk$$

risulta:

$$(4.5) \quad L \cdot M = L \times M + i(\mathfrak{I}L \times M) + j(\mathfrak{J}L \times M) + k(\mathfrak{K}L \times M) .$$

5. La (4.5) mostra che due vettori L, M hanno *prodotto hermitiano reale* se e solo se M è ortogonale ad $\mathfrak{I}L, \mathfrak{J}L, \mathfrak{K}L$.

Consideriamo (analogamente al caso noto di $E_{2n} \equiv \mathbf{C}^n$) gli spazi $E_t \subset E_{4n}$ a *prodotto hermitiano reale* (brev. p.h.r.), ossia gli spazi per i quali ogni coppia di vettori ha prodotto hermitiano reale.

Si ha allora il seguente risultato che generalizza uno di Rizza [9] per il caso complesso:

TEOR. 1. — *Un $E_t \subset E_{4n} \equiv \mathbf{Q}^n$ è a prodotto hermitiano reale se e solo se esso è totalmente ortogonale a ciascuno degli spazi $\mathfrak{I}E_t, \mathfrak{J}E_t, \mathfrak{K}E_t$. In tal caso anche gli spazi $\mathfrak{I}E_t, \mathfrak{J}E_t, \mathfrak{K}E_t$ riescono a due a due totalmente ortogonali. Ne consegue $t \leq n$, e che per un vettore $M \neq 0$ passano $\infty^N E_t$ p.h.r. con $N = \frac{1}{2}(t-1)(8n-5t)$.*

6. Nel caso di $E_{2n} = \mathbf{C}^n$ su ogni piano caratteristico riesce subordinata un'*orientazione*: quella definita dalla coppia di vettori (L, Li) ove L è un qualsiasi vettore del piano.

Analogamente in $E_{4n} \equiv \mathbf{Q}^n$ su ogni E_4 caratteristico quaternionale riesce subordinata l'orientazione definita dalla quaterna di vettori (L, Li, Lj, Lk) , indipendentemente dal vettore L individuante l' E_4 (n. 3).

L'analogia col caso complesso appare se alla biiezione $L \rightarrow Li$ in $\mathbf{C}^n$ si pensano sostituite *non* le biiezioni $L \rightarrow Li, L \rightarrow Lj, L \rightarrow Lk$ (che non hanno significato intrinseco) bensì l'applicazione che ad L associa l' E_3 dei vettori Li, Lj, Lk .

7. Così come accade in $\mathbf{C}^n$, anche in $\mathbf{Q}^n$ il prodotto hermitiano è legato a semplici proprietà metriche euclidee. Precisamente si ha:

TEOR. 2. — *In $E_{4n} \equiv \mathbf{Q}^n$ il quadrato della norma del quaternione $l \cdot m$, prodotto hermitiano dei vettori unitari l, m , è uguale al coseno dell'angolo degli E_4 caratteristici passanti risp. per l, m .*

Se si definisce *angolo hermitiano* di due vettori L, M l'angolo φ degli E_4 caratteristici quaternionali individuati da L, M , risulta:

$$(7.1) \quad \cos \varphi = \frac{[\mathfrak{U}(L \cdot M)]^2}{\text{mis}^4 L \text{mis}^4 M} \quad (3) .$$

Le proprietà analoghe alle precedenti in $\mathbf{C}^n$ sono dovute a G. B. Rizza [10].

8. Passo ora a definire una nozione di *deviazione caratteristica*, analoga a quella introdotta da Rizza [8], [9] per gli spazi di dimensione pari subordinati ad $E_{2n} \equiv \mathbf{C}^n$.

$$(3) \quad \mathfrak{U}(q) = q\bar{q} \text{ è la norma di } q \in \mathbf{Q} .$$

Introduco qui tale nozione per ogni $E_t \subset E_{4n} \equiv \mathbf{Q}^n$ con $t = 1, 2, 3, 4$.

Non fisseremo un'orientazione di E_t , cosicch parleremo di *deviazione caratteristica assoluta* δ_{E_t} . Essa un angolo compreso tra 0 e $\pi/2$ che riesce tanto minore quanto pi E_t prossimo ad essere contenuto in un E_4 caratteristico, cio prossimo ad essere *pseudo-caratteristico* (secondo una terminologia introdotta, per il caso complesso, da F. Severi [11]).

Per un E_1 la deviazione caratteristica δ_{E_1} va ovviamente assunta *nulla*, in quanto per un E_1 passa sempre un E_4 caratteristico.

Per definire δ_{E_t} generalizziamo una notevole espressione della deviazione caratteristica di un $E_2 \subset \mathbf{C}^n$ che la lega alla parte immaginaria del prodotto hermitiano, dovuta al Martinelli [5]. Nel nostro caso poniamo:

$$(8.1) \quad \cos^2 \delta_{E_2} = \frac{\Im [L \cdot M]}{\text{mis}^2(L \wedge M)}$$

ove L, M sono due qualunque vettori indipendenti dell' E_2 considerato. Se, in particolare, $L = l$ ed $M = m$ sono *unitari* ed *ortogonali*, si ottiene la:

$$(8.2) \quad \cos^2 \delta_{E_2} = \Im (l \cdot m)$$

Sussiste allora il:

TEOR. 3. - Per la deviazione caratteristica δ_{E_2} di un $E_2 \subset E_{4n} \equiv \mathbf{Q}^n$ espressa dalle (8.1), (8.2) risulta: $0 \leq \delta_{E_2} \leq \pi/2$; e: a) $\delta_{E_2} = 0$ se e solo se E_2 *pseudocaratteristico*; b) $\delta_{E_2} = \pi/2$ se e solo se E_2 *p.h.r.*

9. La deviazione caratteristica del piano $E_2(L, M)$ individuato dai vettori L, M collegata agli angoli euclideo ed hermitiano di L, M . Precisamente si ha:

TEOR. 4. - Per ogni coppia di vettori indipendenti L, M di $E_{4n} \equiv \mathbf{Q}^n$, risulta:

$$(9.1) \quad \cos \varphi = (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \delta)^2$$

ove θ, φ e δ denotano *rispettivamente* gli angoli euclideo ed hermitiano di L, M e la deviazione caratteristica di $E_2(L, M)$.

Anche questo risultato ne estende uno di Rizza [10] per il caso complesso.

Un'altra notevole espressione per la deviazione caratteristica di un E_2 data dalla:

$$(9.2) \quad \cos^2 \delta_{E_2} = \cos(E_2, \Im E_2) + \cos(E_2, \Re E_2) + \cos(E_2, \mathfrak{H} E_2).$$

10. possibile definire una deviazione caratteristica per un E_t ($t = 3, 4$) come media di deviazioni caratteristiche di opportuni E_2 dell' E_t .

(10.1) LEMMA. - Siano $M_1, \dots, M_t$ ($t = 2, \dots, 4n$) vettori di $E_t \subset E_{4n} \equiv \mathbf{Q}^n$.

Il numero reale:

$$(10.2) \quad \sum_{r < s} \Im [M_r \cdot M_s]$$

 invariante rispetto ad una qualsiasi trasformazione ortogonale in E_t .

Ciò posto, siano m ($r = 1, 2, 3, 4$) quattro vettori unitari e mutuamente ortogonali di E_{4n} . Generalizzando la (8.2), definiamo le deviazioni caratteristiche assolute degli $E_3(m_1, m_2, m_3)$ e $E_4(m_1, m_2, m_3, m_4)$, mediante le formule seguenti:

$$(10.3) \quad \cos^2 \delta_{E_3} = \frac{1}{3} \sum_{r < s}^3 \mathfrak{U}(m_r \cdot m_s)$$

$$(10.4) \quad \cos^2 \delta_{E_4} = \frac{1}{6} \sum_{r < s}^4 \mathfrak{U}(m_r \cdot m_s),$$

i cui secondi membri sono invarianti rispetto alla scelta dei vettori ortonormali m di E_3, E_4 in virtù del Lemma (10.1).

Si ha allora il:

TEOR. 5. — *Per la deviazione caratteristica assoluta di un $E_t \subset E_{4n} \equiv \mathbf{Q}^n$, espressa dalle (10.3), (10.4) risp. per $t = 3, 4$, risulta: $0 \leq \delta_{E_t} \leq \pi/2$, e:*
 a) $\delta_{E_t} = 0$ se e solo se E_t è pseudocaratteristico (anzi, caratteristico per $t = 4$);
 b) $\delta_{E_t} = \pi/2$ se e solo se E_t è a prodotto hermitiano reale.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] M. BRUNI, *Su alcuni sistemi di sottospazi di uno spazio hermitiano*, « Rend. Mat. », 20 (1961).
- [2] E. CARTAN, *Léçons sur la Géométrie des espaces de Riemann*; 2me ed.; Gauthier-Villars, Paris (1951).
- [3] B. ECKMANN, *Cours sur les variétés complexes*, Centro Internazionale Matematico Estivo, C.I.M.E., Cremonese, Roma (1956).
- [4] E. MARTINELLI, *Sulle varietà a struttura complessa*, « Ann. Mat. pura e appl. », 43 (1957).
- [5] E. MARTINELLI, *Generalizzazione dei teoremi di minimo volume di Wirtinger a tutte le varietà kähleriane o quasi-kähleriane*, « Ann. Mat. pura e appl. », 50 (1960).
- [6] E. MARTINELLI, *Varietà a struttura quaternionale generalizzata*, « Rend. Lincei », sez. 8^a, 26 (1959).
- [7] E. MARTINELLI, *Modello metrico reale dello spazio proiettivo quaternionale*, « Ann. Mat. pura e appl. », 49 (1960).
- [8] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica delle faccette piane di una varietà a struttura complessa*, « Rend. Lincei », sez. 8^a, 24 (1958).
- [9] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica e proprietà locali delle 2q-faccette di una V_{2n} a struttura complessa*, « Rend. Acc. Naz. », XL, 10 (1959).
- [10] G. B. RIZZA, *Teoremi di curvatura in una V_{2n} quasi hermitiana*, « Riv. Mat. Univ. Parma », 2 (1961).
- [11] F. SEVERI, *La geometria delle funzioni analitiche di più variabili ed i teoremi di esistenza e di unicità ad esse relativi*, « Ann. di Mat. pura e appl. », 16 (1937).

SUMMARY. — A comparison is made between the hermitian metric of a n -dimensional quaternional vector space $\mathbf{Q}^n$ and the euclidean metric of a $4n$ -dimensional real vector space $\mathbf{R}^{4n} \equiv E_{4n}$ (identified in an obvious way to $\mathbf{Q}^n$).

Characteristic deviations for t -dimensional subspaces E_t of E_{4n} ($t = 1, 2, 3, 4$) are introduced, and some properties of its are given.