Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gianfranco Panella

Una classe di sistemi cartesiani

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.4, p. 480–485.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_4_480_0>

Matematica. — *Una classe di sistemi cartesiani.* Nota di GIANFRANCO PANELLA [(*)], presentata [(**)] dal Socio B. SEGRE.

T. G. Ostrom [2] [(1)] e L. A. Rosati [5] hanno recentemente provato, ciascuno indipendentemente dall'altro, l'esistenza di piani grafici finiti che risultano (R , r)–transitivi (rispetto ad un loro punto R e ad una loro retta r passante per R), senza tuttavia essere (R , R)–transitivi o (r , r)–transitivi.

Nella presente Nota si fornisce un risultato complementare a questo, costruendo una classe di sistemi cartesiani (propri) che comprende una sottoclasse di sistemi cartesiani finiti [(2)]. All'uopo si sfrutta un'idea già adombrata in [3] (p. 349), che porta a certi sistemi cartesiani propri mediante una semplice modifica della definizione di moltiplicazione entro un quasicorpo di Marshall Hall (costruito a partire da un campo opportuno).

La Nota è suddivisa in tre numeri. Nel n. 1 si stabiliscono due lemmi, poggiando sui quali si perviene poi, nel n. 2, al risultato annunciato. Il n. 3 contiene alcune osservazioni sulla classe dei sistemi cartesiani ottenibili nel modo qui indicato.

1. Sia J (F , s) il quasicorpo di Marshall Hall [6] (Appendice) costruito a partire dal campo F di caratteristica diversa da due e dal polinomio $x^2 - s$ a coefficienti in F e irriducibile su F · J(F , s) ha come insieme sostegno il prodotto cartesiano F × F dell'insieme sostegno del campo F per se stesso; le operazioni di addizione e di moltiplicazione che gli competono sono definite, se $a = (a_1 , a_2)$ e $b = (b_1 , b_2)$ sono due suoi elementi qualsiansi ($a_1, a_2 , b_1 , b_2 \in$ F), dalle seguenti uguaglianze

$$a+b = (a_1 , a_2) + (b_1 , b_2) = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2)$$

$$ab = (a_1 , a_2)\ (b_1 , b_2) = (a_1 b_1 , a_1 b_2) \quad \text{se } a_2 = 0$$

$$ab = (a_1 , a_2)(b_1 , b_2) = (a_1 b_1 - (a_1^2 - s)\ a_2^{-1}\ b_2 , a_2 b_1 - a_1 b_2) \qquad \text{se } a_2 \neq 0.$$

L'insieme $N = \{ a = (a_1 , a_2) \in J (F , s) \mid a_2 = 0 \}$ è il nucleo del quasicorpo J (F , s); l'applicazione F $\to$ J (F , s) definita ponendo $a \to (a , 0)$ (per ogni $a \in$ F) è un monomorfismo del campo F in J (F , s) avente N per immagine: potremo perciò identificare F con N e pensare J (F , s) come estensione del suo sottoquasicorpo F.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 17 del Comitato per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 10 aprile 1965.

(1) I numeri in [ ] rinviano alla bibliografia in fine.

(2) Classi di sistemi cartesiani infiniti sono note da tempo; cfr., ad esempio, L. LOMBARDO RADICE [1] e G. PICKERT [4].

Con tale convenzione, introduciamo le applicazioni

$$g \ : \ J(F, s) \times J(F, s) \to F$$

definendo $g(a, b) = (a_2 b_1 - a_1 b_2)^2$ ($a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$ elementi arbitrari di $J(F, s)$), e

$$f \ : \ (J(F, s) - F) \times J(F, s) \to F$$

definendo $f(a, b) = g(a, b) - sb_2^2$, ove $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$ sono elementi arbitrari di $J(F, s)$ tali che $a_2 \neq 0$; sia poi F′ l'immagine, nella f, di $(J(F, s) - F) \times J(F, s)$: $F' = f[(J(F, s) - F) \times J(F, s)] \subseteq F$.

Ciò posto, dotiamo l'insieme sostegno del quasicorpo $J(F, s)$ di un'operazione binaria, $\circ$, con la seguente definizione (3):

$a \circ b = ab$ se $a \in F$, o se $f(a, b) = 0$, oppure se $f(a, b) \sim 1$

$a \circ b = -ab$ se $a \notin F$ e se $f(a, b) \not\sim 1$.

Per conseguire il risultato cui questa Nota è dedicata proviamo, anzitutto, due lemmi.

LEMMA 1. – *Siano a, b, c elementi di* $J(F, s)$ *tali che* $a \neq b$ *e* $c \neq 0$. *Se il prodotto di due qualunque elementi di* F′ *che siano non quadrati in* F *è un quadrato in* F, *esiste uno ed un solo elemento x di* $J(F, s)$ *che verifica l'equazione*:

$$(\alpha) \qquad -a \circ x + b \circ x = c.$$

Dimostrazione. – Le eventuali soluzioni della (α) vanno ricercate tra gli elementi x del quasicorpo $J(F, s)$ che verificano una (almeno) delle seguenti equazioni:

(α_1) $-ax + bx = c$, (α_2) $-ax - bx = c$, (α_3) $ax - bx = c$, (α_4) $ax + bx = c$.

Discutiamo, separatamente, tre casi.

Primo caso: $a, b \in F$. Se x' è l'unica soluzione di (α_1) in $J(F, s)$, risulta $-a \circ x' + b \circ x' = c$; le eventuali soluzioni delle (α_j) ($j = 2, 3, 4$), distinte da x', non verificano l'equazione (α).

Secondo caso: $a \in F$ e $b \notin F$ (si procede in modo del tutto analogo se $a \notin F$ e $b \in F$). Le soluzioni della (α) vanno ricercate tra quelle delle equazioni (α_1) e (α_2). Ciascuna di tali equazioni ha una ed una sola soluzione in $J(F, s)$: sia x' la soluzione di (α_1) e x'' la soluzione di (α_2). Risulta $f(b, x') =$

(3) Se t, u, v, w sono elementi non nulli del campo F, le scritture $t \sim 1$, $u \not\sim 1$, $v \sim w$ stanno a significare, rispettivamente, che t è un quadrato in F, che u è un non quadrato in F, che v e w sono, contemporaneamente, quadrati o non quadrati in F.

$= f(b, x'') = (a^2 - s)^{-1} f(b, c) \neq 0$. Ciò comporta che se $(a_2 - s)^{-1} f(b, c) \sim \sim 1$, x' è l'unica soluzione della (α) in $J(F, s)$; mentre nella rimanente eventualità, in cui $(a^2 - s)^{-1} f(b, c) \not\sim 1$, solamente l'elemento x'' di $J(F, s)$ verifica l'equazione (α).

Terzo caso: $a \notin F$ e $b \notin F$. Se $a + b = 0$, le equazioni (α_2) e (α_4) non sono risolubili in $J(F, s)$. La (α_1) ha una ed una sola soluzione x' in $J(F, s)$, e la (α_3) una ed una sola soluzione x'', $x'' = -x'$, in $J(F, s)$; risulta $f(a, x') = f(b, x') = f(a, x'') = f(b, x'') \neq 0$. Se $f(a, x') \sim 1$, x' è l'unico elemento di $J(F, s)$ che verifica la (α); se invece $f(a, x') \not\sim 1$, solamente l'elemento x'' di $J(F, s)$ verifica la (α).

Possiamo, ormai, supporre $a + b \neq 0$; ciascuna delle quattro equazioni (α_1) (α_2), (α_3), (α_4) è univocamente risolubile in $J(F, s)$: siano x', x'', $-x'$, $-x''$ le rispettive soluzioni. Detto D' (D'') il determinante della matrice dei coefficienti del sistema lineare (a coefficienti in F e opportunamente normalizzato) che si ottiene dalla (α_1) (dalla (α_2)) applicando la definizione di moltiplicazione tra elementi di $J(F, s)$, si trova $f(a, x') = -a_2 b_2^{-1} D'^{-1} f(b, c) \neq 0$, $f(a, x'') = a_2 b_2^{-1} D''^{-1} f(b, c) \neq 0$, $f(b, x') = -b_2 a_2^{-1} D'^{-1} f(a, c) \neq 0$, $f(b, x'') = b_2 a_2^{-1} D''^{-1} f(a, c) \neq 0$. In conseguenza, risulta $f(a, x') f(b, x') \sim \sim f(b, c) f(a, c) \sim f(a, x'') f(b, x'')$. Se $f(b, c) f(a, c) \sim 1$, l'unica soluzione di (α) in $J(F, s)$ è x' o $-x'$ a seconda che $f(b, x') \sim 1$ oppure $f(b, x') \not\sim 1$. Se invece $f(b, c) f(a, c) \not\sim 1$, l'unica soluzione di (α) in $J(F, s)$ è data da x'' o da $-x''$ a seconda che $f(b, x'') \not\sim 1$ oppure $f(b, x'') \sim 1$.

Il lemma 1 è così dimostrato.

LEMMA 2. – *Siano a, b, c elementi di* $J(F, s)$ *tali che* $a \neq b$ *e* $c \neq 0$. *Se il prodotto di due qualunque elementi di* F′ *che siano non quadrati in* F è *un quadrato in* F, *esiste uno ed un solo elemento x di* $J(F, s)$ *che verifica l'equazione*:

$$(\beta) \qquad x \circ a - x \circ b = c.$$

Dimostrazione. – Le eventuali soluzioni della (β) vanno ricercate tra gli elementi x del quasicorpo $J(F, s)$ che verificano una (almeno) delle seguenti equazioni:

$$(\beta_1) \quad xa - xb = c, \quad (\beta_2) \quad xa + xb = c, \quad (\beta_3) \quad -xa + xb = c, \quad (\beta_4) \quad -xa - xb = c.$$

Discutiamo, separatamente, tre casi.

Primo caso: $g(c, a - b) \neq 0$ e $g(c, a + b) \neq 0$. Ciascuna delle equazioni (β_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ ammette esattamente una soluzione in $J(F, s)$ e questa appartiene a $J(F, s) - F$. Se x' e x'' sono le soluzioni di (β_1) e (β_2) rispettivamente, allora (β_3) ha soluzione $-x'$ e (β_4) ha soluzione $-x''$. Risulta

$$f(x', a) = f(-x', a) = [g(c, a - b)]^{-1} [c_2^2 - s(a_2 - b_2)^2] (g(c, a) - sg(a, b)) \neq 0$$

$$f(x', b) = f(-x', b) = [g(c, a - b)]^{-1} [c_2^2 - s(a_2 - b_2)^2] (g(c, b) - sg(b, a)) \neq 0$$

$$f(x'', a) = f(-x'', a) = [g(c, a + b)]^{-1} [c_2^2 - s(a_2 + b_2)^2] (g(c, a) - sg(a, b)) \neq 0$$

$$f(x'', b) = f(-x'', b) = [g(c, a + b)]^{-1} [c_2^2 - s(a_2 + b_2)^2] (g(c, b) - sg(b, a)) \neq 0.$$

Ne segue $f(x', a) f(x', b) \sim (g(c, a) - sg(a, b))(g(c, b) - sg(b, a)) \sim \sim f(x'', a) f(x'', b)$: se $(g(c, a) - sg(a, b))(g(c, b) - sg(b, a)) \sim 1$ l'equazione (β) ha, in $J(F, s)$, l'unica soluzione x', $o - x'$ a seconda che $f(x', a) \sim 1$ oppure $f(x', a) \not\sim 1$; altrimenti la (β) ha l'unica soluzione x'' o $-x''$, e ciò a seconda che $f(x'', a) \sim 1$ oppure $f(x'', a) \not\sim 1$.

Secondo caso: $g(c, a - b) \neq 0$ e $g(c, a + b) = 0$. Le equazioni (β_2) e (β_4) hanno soluzioni in F oppure non sono risolubili in $J(F, s)$; le eventuali soluzioni della (β) vanno quindi ricercate tra le soluzioni di (β_1) e di (β_3): siano esse, rispettivamente, x' e $-x'$. Per $f(x', a)$ e $f(x', b)$ si trovano le medesime espressioni del primo caso, ma ora risulta $g(c, a) = g(c, b)$: ossia, $f(x', a) f(x', b) \sim 1$. Da ciò deriva che l'equazione (β) ha, in $J(F, s)$, l'unica soluzione x' o $-x'$ a seconda che $f(x', a) \sim 1$ oppure $f(x', a) \not\sim 1$.

Terzo caso: $g(c, a - b) = 0$. Analogamente al caso precedente, si ha che (β_1) e (β_3) hanno, ciascuna, una soluzione in F; di tali soluzioni una, quella di (β_1), verifica la (β). Le eventuali soluzioni di (β_2) e (β_4) non sono poi soluzioni di (β). Infatti, se $g(c, a+b) \neq 0$, (β_2) ((β_4)) ha una unica soluzione x'' ($-x''$) in $J(F, s)$, la quale appartiene a $J(F, s) - F$, e risulta $f(x'', a) f(x'', b) \sim 1$ in quanto $g(c, b) = g(c, a)$. Se invece $g(c, a + b) = 0$, l'eventuale soluzione di (β_2) ((β_4)), in $J(F, s)$, appartiene ad F, ond'essa verifica la (β) nel caso che coincida con la soluzione di (β_1).

Il lemma 2 è così dimostrato.

2. Conservando le notazioni ed usufruendo delle definizioni del n. 1, dotiamo l'insieme sostegno del quasicorpo di Hall $J(F, s)$ delle operazioni di addizione, $+$, e moltiplicazione, $\circ$; indichiamo con $J(F, s)(+, \circ)$ la struttura algebrica così definita. Proveremo il seguente

TEOREMA: *Se il prodotto di due qualunque elementi di* F' *che siano non quadrati nel campo* F *è un quadrato in* F, $J(F, s)(+, \circ)$ *è un sistema cartesiano (commutativo rispetto all'addizione). Se, inoltre, ferma restando la precedente ipotesi, il campo* F *ha ordine superiore a tre ed esistono* $a, b \in (J(F, s) - F)$ *tali che* $f(a, b) \not\sim 1$, *il sistema cartesiano* $J(F, s)(+, \circ)$ *non è un quasicorpo destro né un quasicorpo sinistro.*

Dimostrazione. – Per stabilire la prima parte del teorema, occorre e basta provare le seguenti asserzioni:

1ª $J(F, S)(+)$ è un gruppo (abeliano);

2ª se 0 è l'elemento neutro di $J(F, s)(+)$, risulta $0 \circ a = a \circ 0 = 0$ qualunque sia a in $J(F, s)$; $J(F, s)(\circ)$ possiede elemento neutro (destro e sinistro), distinto da 0;

3ª se a, b, c, sono elementi di $J(F, s)$ tali che $a \neq b$, esiste uno ed un solo elemento x di $J(F, s)$ che verifica l'equazione $-a \circ x + b \circ x = c$;

4ª se a, b, c sono elementi di $J(F, s)$ tali che $a \neq b$, esiste uno ed un solo elemento x di $J(F, s)$ che verifica l'equazione $x \circ a - x \circ b = c$.

La 1ª e la 2ª sono banali. Se $c \neq 0$, la 3ª è conseguenza del lemma 1 e la 4ª è conseguenza del lemma 2; inoltre, si prova facilmente che le equazioni $-a \circ x + b \circ x = 0$ e $x \circ a - x \circ b = 0$ ($a, b \in J(F, s)$, $a \neq b$) ammettono come unica soluzione l'elemento neutro di $J(F, s)(+)$, ciò che dimostra le 3ª, 4ª per $c = 0$.

Si supponga ora che F abbia ordine maggiore di tre, e sia x_1 un elemento non nullo di F che verifichi la condizione $x_1^2 \neq 2s$; ne consegue che è $(x_1, x_2) \circ \circ (0, c_2) \neq [(x_1, 0) \circ (0, c_2) + (0, x_2) \circ (0, c_2)]$ ove x_2 e c_2 denotano elementi non nulli del campo F, talché la moltiplicazione $\circ$ non è distributiva a sinistra rispetto all'addizione. Se, infine, a, b sono elementi di $J(F, s) - F$ tali che $f(a, b) \not\sim 1$ e c denota un elemento non nullo di F, risulta $a \circ (b + c) \neq \neq (a \circ b + a \circ c)$, onde la moltiplicazione $\circ$ non è distributiva neppure a destra rispetto all'addizione. Anche la seconda parte del teorema è così dimostrata.

3. Per concludere la presente Nota, ci proponiamo di meglio accertare la consistenza della classe di sistemi cartesiani (propri) data dal precedente teorema. Osserviamo all'uopo che, in definitiva, si perviene ad un elemento di quella classe a partire da un campo F che verifichi le seguenti condizioni:

(I) F ha caratteristica diversa da due, ha ordine superiore a tre e possiede un elemento s non quadrato (in F);

(II) se $F' = \{ z \in F \mid z = x^2 - sy^2 \text{ con } x, y \in F \}$, il prodotto di due qualunque elementi di F' che siano non quadrati in F è un quadrato in F;

(III) esistono in F elementi x, y, z, t tali che $(xz - yt)^2 - st^2$ sia un non quadrato in F.

Ne consegue, intanto, l'esistenza di sistemi cartesiani (propri) $J(F, s)(+, \circ)$ finiti: il teorema del n. 2 permette infatti di costruire un sistema siffatto a partire da un qualunque campo di Galois di caratteristica diversa da due, che abbia ordine maggiore di tre, usufruendo di un qualunque suo elemento s che sia un non quadrato.

Inoltre, si costruiscono facilmente campi infiniti che verificano le condizioni (I), (II), (III). All'uopo basta, ad esempio, considerare un campo di Galois F_0 di caratteristica diversa da due, ed una successione $n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots$ di interi dispari maggiori di uno; si può allora costruire una catena di ampliamenti:

$$(1) \qquad F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k \subset \cdots,$$

definendo F_i come il campo di Galois – estensione finita di F_{i-1} – avente grado n_i su F_{i-1} $(i = 1, 2, \cdots, k, \cdots)$. Se $i \leq j$, è definito un omomorfismo naturale (d'immersione) $f_{ij}: F_i \rightarrow F_j$; l'unione degli insiemi sostegno dei campi della catena (1), eseguite le identificazioni naturali, ha una struttura naturale di campo: tale campo (infinito) verifica le condizioni (I), (II), (III). Da esso, mediante il teorema del n. 2, si ottiene un sistema cartesiano (proprio) infinito del tipo indicato.

BIBLIOGRAFIA.

[1] LOMBARDO RADICE L., *I piani di rifrazione*, « Rend. Mat. e Appl. », *13*, 130–139 (1954).
[2] OSTROM T. G., *Finite planes with a single* (P, *l*)*-transitivity*, « Arch. Math. », *15* (1964).
[3] PANELLA G., *Osservazioni sulla costruzione dei piani di Hughes*, « Rend. Mat. e Appl. », *23*, 331–350 (1964).
[4] PICKERT G., *Nichkommutative cartesische Gruppen*, « Arch. Math. », *3*, 335–342 (1952).
[5] ROSATI L. A., *Su una nuova classe di piani grafici*, « Ricerche Mat. », *13*, 39–55 (1964).
[6] SEGRE B., *Lectures on Modern Geometry* (con appendice di L. Lombardo Radice), Roma, Cremonese (1961).

SUMMARY. — We give the construction of a class of Cartesian sets containing a subclass of finite Cartesian sets. The result is reached by slightly altering the definition of multiplication in a suitable Hall's V.W.-system.