Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Rosanna Villella Bressan

Sugli autoomeomorfismi periodici della corona circolare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.4, p. 477–479.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_4_477_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Matematica. — *Sugli autoomeomorfismi periodici della corona circolare* [*]. Nota di ROSANNA VILLELLA BRESSAN, presentata [**] dal Corrisp. G. SCORZA DRAGONI.

In questa Nota mi occupo degli autoomeomorfismi di una corona circolare che sono privi di punti uniti, applicano le circonferenze estreme della corona ciascuna su se stessa e sono periodici [1]. In un tal autoomeomorfismo è sempre presente, nella corona, una curva semplice e aperta, che congiunge le circonferenze estreme della corona ed è libera (cioè priva di punti in comune con la propria immagine). Questo risultato discende immediatamente dal fatto che allora l'autoomeomorfismo è topologicamente equivalente ad una rotazione della corona, giusta un teorema di Brouwer e Kerékjártó [2]. Nel caso che il quadrato dell'autoomeomorfismo sia l'identità, la circostanza è stata dedotta da Scorza Dragoni da un suo recente teorema sugli autoomeomorfismi di una corona circolare privi di punti uniti e applicanti le circonferenze estreme della corona ciascuna su se stessa.

Qui farò vedere che il teorema di Scorza Dragoni permette di giungere alla stessa conclusione anche nel caso che il periodo dell'autoomeomorfismo sia maggiore di due [3].

1. – Sia t un autoomeomorfismo di una corona circolare, privo di punti uniti, il quale applichi le circonferenze estreme della corona ciascuna su se stessa. Secondo quel teorema è allora presente, nella corona, almeno una curva semplice e aperta che unisca le circonferenze estreme della corona e sia libera rispetto a t; oppure almeno una curva semplice e chiusa che aggiri il centro della corona e sia libera rispetto a t; oppure almeno una curva semplice e chiusa che

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

(**) Nella seduta del 10 aprile 1965.

(1) Un autoomeorfismo t si dice periodico, ed il numero naturale m è il suo periodo, se la sua m–esima potenza, t^m, è l'identità, mentre le potenze $t, t^2, \cdots, t^{m-1}$ sono distinte dall'identità (se $m > 1$). Cfr. B. V. KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie* (Springer, Berlino, 1923), p. 223.

(2) B. V. KERÉKJÁRTÓ, *Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelflächen*, «Mathematiche Annalen», *80*, 36–38 (1919); L. E. J. BROUWER, *Über die periodischen Transformationen der Kugel*, «Mathematische Annalen», *80*, 39–41 (1919). Se si ricorre al teorema di Brouwer e Kerékjártó non c'è bisogno dell'ipotesi che la trasformazione sia priva di punti uniti (purché essa non sia identica).

(3) Dal suo teorema Scorza Dragoni riesce anzi a dedurre anche che se l'autoomeorfismo è periodico di periodo due, allora esso è topologicamente equivalente ad una rotazione. Sarebbe interessante vedere se la deduzione si può estendere agli autoomeorfismi periodici di periodo qualsiasi.

aggiri il centro della corona e si possa spezzare in due archi tali che uno di esso sia libero rispetto a t e abbia un diametro minore di un numero prefissato, e che l'altro sia libero rispetto a t e abbia intersezione vuota con l'immagine in t, o in t^{-1}, di tutta la curva. E dimostriamo che:

Se l'autoomeomorfismo t è per di più periodico, è presente, nella corona, almeno una curva semplice e aperta che unisce le circonferenze estreme della corona ed è libera in t.

Basta dimostrare che non si possono verificare nè la seconda nè la terza delle circostanze previste dal teorema enunciato (4). Sia m il periodo di t. E facciamo vedere che non esistono curve semplici e chiuse che aggirino il centro della corona e siano libere rispetto a t. Infatti, detta z una tal curva, z individua nell'interno della corona due campi. Detto A quello dei due campi che contiene $t(z)$, A dovrebbe contenere anche la curva $t^n(z)$, qualunque sia il numero naturale n. Ma ciò è assurdo perché $t^m(z)$ coincide con z.

Mostriamo ora che non si può verificare nemmeno la terza delle circostanze previste. Allo scopo osserviamo che se la porzione B della corona ha un diametro minore di un numero positivo, δ, convenientemente scelto, i diametri degli insiemi $\mathrm{B}, t(\mathrm{B}), \cdots, t^{m-1}(\mathrm{B})$ sono minori del numero ε prefissato a piacere. Supponiamo ε tanto piccolo, che la totalità dei raggi proiettanti l'insieme $\mathrm{B} \cup t(\mathrm{B}) \cup \cdots \cup t^{m-1}(\mathrm{B})$ dal centro della corona non riempiano il piano; di guisa che l'insieme $\mathrm{B} \cup t(\mathrm{B}) \cup \cdots \cup t^{m-1}(\mathrm{B})$ non contiene curve chiuse che aggirino il centro della corona. Ed ammettiamo, per assurda ipotesi, che la curva semplice e chiusa z_0 sia contenuta nella corona, aggiri il centro della corona e si possa spezzare in due archi, u e v, entrambi liberi nella t e tali che il diametro di u sia minore di δ, e che per v risulti

$$v \cap t(z_0) = \emptyset, \tag{1}$$

oppure

$$v \cap t^{-1}(z_0) = \emptyset, \tag{2}$$

la (2) essendo equivalente alla $t(v) \cap z_0 = \emptyset$. E consideriamo i successivi trasformati di z_0 mediante $t, t^2, \cdots, t^{m-1}$,

$$z_1, z_2, \cdots, z_{m-1},$$

$z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}$ risultando ancora curve semplici e chiuse che aggirano il centro della corona.

Posto

$$\mathrm{E} = z_0 \cup z_1 \cup \cdots \cup z_{m-1},$$

risulta

$$t(\mathrm{E}) = \mathrm{E}, \tag{3}$$

atteso che t ha periodo m. Il complementare dell'insieme chiuso E si spezza in campi massimali. Di questi campi quelli che contengono il centro della

(4) Sarebbe anzi sufficiente dimostrare che non si può verificare la terza circostanza, atteso che la seconda implica la terza.

corona e l'infinito siano rispettivamente J e J'. Le frontiere j di J e j' di J' sono entrambe curve semplici e chiuse contenute nella corona [5]; e risulta

$$t(j) = j \quad \text{e} \quad t(j') = j', \tag{4}$$

attesa la (3). Inoltre il complementare, C', di J' contiene le regioni limitate, Z_0 e Z_1, rispettivamente individuate da z_0 e z_1, mentre il complementare, C, di J contiene i complementari, D_0 e D_1, degli insiemi Z_0 e Z_1.

Supponiamo che si verifichi la (1). Allora l'arco v o è interno all'insieme D_1 e quindi all'insieme C, di guisa che risulta

$$j \cap v = \emptyset; \tag{5}$$

oppure è interno all'insieme Z_1 e quindi all'insieme C', di guisa che risulta

$$j' \cap v = \emptyset. \tag{6}$$

La (5) e la prima delle (4) implicano

$$j \cap t^k(v) = \emptyset \qquad k = 0, 1, \cdots, m-1, \tag{7}$$

e quindi

$$j \subseteq u \cup t(u) \cup \cdots \cup t^{m-1}(u); \tag{8}$$

mentre la (6) e la seconda delle (4) implicano

$$j' \cap t^k(v) = \emptyset \qquad k = 0, 1, \cdots, m-1, \tag{9}$$

e quindi

$$j' \subseteq u \cup t^2(u) \cup \cdots \cup t^{m-1}(u); \tag{10}$$

e la (8) e la (10) sono entrambe assurde, attesa l'ipotesi fatta sul numero ε e atteso che le curve j e j' aggirano il centro della corona.

Allo stesso modo si dimostra che non può verificarsi la (2). Infatti la (2) implica che l'arco $t(v)$ o è interno all'insieme D_0 e quindi a C, di guisa che risulta

$$j \cap t(v) = \emptyset; \tag{11}$$

oppure è interno a Z_0 e quindi a C', di guisa che risulta

$$j' \cap t(v) = \emptyset. \tag{12}$$

La (11) e la prima delle (4) implicano la (7) e quindi la (8); la (12) e la seconda delle (4) implicano la (9) e quindi la (10). E la (8) e la (10), come già abbiamo osservato, sono entrambe assurde.

(5) SCORZA-DRAGONI, *Qualche teorema sulle curve di Jordan*, « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », serie VI, vol. XXIII, 181-186 (1936).