Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Miron Nicolescu, Ciprian Foiaş

Representation de Poisson et problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.4, p. 466–476.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_4_466_0>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Représentation de Poisson et problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur.* Nota di MIRON NICOLESCU e CIPRIAN FOIAS, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

A M. Le *Professeur Mauro Picone.* En témoignage de respectueuse affection à l'occasion de son 80e anniversaire.

1. Dans le Mémoire [3] de l'un des auteurs on a démontré que si u est une solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

dans la bande

$$-\infty < x < +\infty \quad , \quad 0 < y < \delta, \tag{2}$$

continue sur la bande fermée

$$-\infty < x < +\infty \quad , \quad 0 \leqq y \leqq \delta, \tag{3}$$

où elle vérifie en outre la limitation

$$|u(x, y)| \leqq Me^{Kx^2}, \tag{4}$$

avec

$$0 \leqq K < \frac{1}{4\delta}, \tag{5}$$

alors u est représentée en chaque point (x, y) de la bande (2) par la formule de Poisson

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u(\xi, h)\, d\xi, \tag{6}$$

quel que soit h tel que

$$0 \leqq h < y < \delta. \tag{7}$$

Un résultat semblable avait été obtenu auparavant par le prof. M. Picone [4] (1).

Le théorème d'unicité qu'on appelle communément théorème de Tichonov [5] avait été déduit indépendamment par l'auteur du Mémoire [3], en

(*) Nella seduta del 13 marzo 1965.

(1) Le Mémoire cité de M. Picone, à côté des résultats plus anciens de E. E. Levi, peut être considéré comme le point de départ de toutes les recherches ultérieures concernant l'équation de la chaleur.

partant de la formule (6) [2]. Un théorème d'unicité dans le demi-plan et non pas dans une bande mais utilisant la même condition (4), est contenu dans le Mémoire cité de M. Picone. Le même théorème d'unicité a d'ailleurs été étendu ces dernières années à des équations et systèmes d'équations paraboliques très générales (voir par example [1] et [2]).

Toutefois, le seul résultat *nouveau* obtenu pour le cas classique de l'équation (1) nous semble bien être le théorème de D. V. Widder [6] concernant l'unicité des solutions du problème de Cauchy, qui sont bornées seulement d'un seul côté.

Ainsi l'idée de faire dériver les deux théorèmes d'unicité mentionnés d'une proposition plus générale se pose d'une manière naturelle. Ce travail est consacré à la résolution de ce problème. Enonçons tout de suite le résultat obtenu dans cette direction:

THÉORÈME D'UNICITÉ: *L'unicité des solutions du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur* (1) *dans une bande* $0 < y < Y$ *a lieu dans la classe des fonctions vérifiant l'inégalité*

$$u(x, y) > -Me^{Kx^2}, \tag{4 bis}$$

où M *et* K *sont des constantes positivies.*

Il est visible que ce théorème contient le théorème d'unicité de 1937 aussi bien que le théorème d'unicité de David Vernon Widder.

La démonstration apparaîtra comme une conséquence naturelle du fait que la technique utilisée dans [3] nous permettra d'obtenir la formule de représentation (6) avec la seule hypothèse (4 *bis*).

2. Considérons dans le plan xOy le rectangle PABQ de sommets respectifs $P(r, y)$, $A(R, h)$, $B(R, h)$, $Q(R, y)$, avec

$$-\infty < r < R < +\infty \quad , \quad 0 \leqq h < y \leqq \delta.$$

Si u est une solution de (1) dans ce rectangle, on a la formule bien connue de Green

$$\left.\begin{matrix} u(x, y) \\ 0 \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(x-r)\, u(r, \eta)}{2(y-\eta)}\right] d\eta$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=R} - \frac{(x-R)\cdot u(R, \eta)}{2(y-\eta)}\right] d\eta$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_r^R e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u(\xi, h)\, d\xi, \tag{8}$$

suivant que le point $M(x, y)$ est dans l'intervalle PQ ou extérieur à cet intervalle.

(2) Dans le Mémoire cité de 1937 on trouve *aussi* le théorème d'unicité pour la demi-bande.

Appliquons cette formule à M′ (x', y'), où

$$x' = 2\mathrm{R} - x \quad , \quad y' = y ,$$

le point M étant supposé *dans* l'intervalle PQ.

On aura

$$(9) \qquad 0 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(2\mathrm{R}-r-x)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(2\mathrm{R}-r-x)\cdot u(r,\eta)}{2(y-\eta)} \right] d\eta$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_y^h \frac{e^{-\frac{(\mathrm{R}-x)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=\mathrm{R}} - \frac{(\mathrm{R}-x)\cdot u(\mathrm{R},\eta)}{2(y-\eta)} \right] d\eta$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_r^{\mathrm{R}} e^{-\frac{(2\mathrm{R}-x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u(\xi, h)\, d\xi .$$

Retranchons (9) de (8). Il vient

$$(10) \qquad u(x,y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(x-r)\cdot u(r,\eta)}{2(y-\eta)} \right] d\eta$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(2\mathrm{R}-r-x)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(2\mathrm{R}-r-x)\, u(r,\eta)}{2(y-\eta)} \right] d\eta$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y e^{-\frac{(x-\mathrm{R})^2}{4(y-\eta)}} \frac{(x-\mathrm{R})\cdot u(\mathrm{R},\eta)}{(y-\eta)^{3/2}}\, d\eta$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_r^{\mathrm{R}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u(\xi,h)\, d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_r^{\mathrm{R}} e^{-\frac{(2\mathrm{R}-\xi-x)^2}{4(y-h)}} \cdot (\xi, h)\, d\xi .$$

Si l'on introduit les notations habituelles

$$u^+(x,y) = \max\{u(x,y), 0\}$$
$$u^-(x,y) = \max\{-u(x,y), 0\}$$

on aura la décomposition

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y e^{-\frac{(x-\mathrm{R})^2}{4(y-\eta)}} \cdot \frac{(x-\mathrm{R})\cdot u(\mathrm{R},\eta)}{(y-\eta)^{3/2}}\, d\eta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y e^{-\frac{(x-\mathrm{R})^2}{4(y-h)}} \cdot \frac{(\mathrm{R}-x)\cdot u^+(\mathrm{R},\eta)}{(y-\eta)^{3/2}}\, d\eta$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y e^{-\frac{(x-\mathrm{R})^2}{4(y-\eta)}} \cdot \frac{(\mathrm{R}-x)\cdot u^-(\mathrm{R},\eta)}{(y-\eta)^{3/2}}\, d\eta ,$$

où la première intégrale est positive pour R assez grand, tandis que la seconde intégrale est majorée en module, en vertu de (4 *bis*) par

$$\frac{\mathrm{M}e^{\mathrm{KR}^2}}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y e^{-\frac{(x-\mathrm{R})^2}{4(y-\eta)}} \cdot \frac{\mathrm{R}-x}{(y-\eta)^{3/2}}\,d\eta$$

qui tend vers zéro pour $\mathrm{R}\to\infty$, puisque

$$\frac{1}{4(y-\eta)} \geqq \frac{1}{4\delta} > \mathrm{K}.$$

Ainsi, en faisant $\mathrm{R}\to\infty$ dans (10) nous obtenons

$$(11)\qquad u(x,y) \geqq -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(x-r)\,u(r,\eta)}{2(y-\eta)}\right]d\eta$$

$$+\limsup_{\mathrm{R}\to\infty}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}}\int_r^{\mathrm{R}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}\cdot u(\xi,h)\,d\xi\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}}\int_r^{\mathrm{R}} e^{-\frac{(2\mathrm{R}-x-\xi)^2}{4(y-h)}}\cdot u(\xi,h)\,d\xi\right].$$

L'expression entre les crochets est visiblement une forme linéaire de u; soit $\mathrm{F}(u)$ cette forme linéaire.

On aura

$$\mathrm{F}(u) = \mathrm{F}(u^+) - \mathrm{F}(u^-).$$

Mais

$$\lim_{\mathrm{R}\to\infty}\mathrm{F}(u^-) = +\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}}\int_r^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}\cdot u^-(\xi,h)\,d\xi,$$

puisque la seconde intégrale figurant entre les crochets au second membre de (11), où u est remplaceé par u^-, est majorée, en vertu de (4 *bis*) et en tenant compte de la définition de u^-, par l'intégrale

$$\frac{\mathrm{M}}{2\sqrt{\pi(y-h)}}\int_r^{\mathrm{R}} e^{-\frac{(2\mathrm{R}-x-\xi)^2}{4(y-h)}}\cdot e^{\mathrm{K}\xi^2}\,d\xi,$$

qui tend bien vers zéro pour $\mathrm{R}\to\infty$.

En ce qui concerne $\mathrm{F}(u^+)$, remarquons tout d'abord que, pour $\mathrm{R}>\xi$, on a

$$(2\mathrm{R}-x-\xi)^2-(x-\xi)^2 = 4(\mathrm{R}-x)^2-4(\mathrm{R}-x)(\xi-x) \geq 0.$$

Donc, pour $R > 2r$ on aura

$$F(u^+) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_r^K \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} - e^{-\frac{(2R-x-\xi)^2}{4(y-h)}} \right] \cdot u^+(\xi, h)\, d\xi \geq$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_r^{R/2} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} - e^{-\frac{(2R-x-\xi)^2}{4(y-h)}} \right] \cdot u^+(\xi, h)\, d\xi =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_r^{R/2} \left[1 - e^{-\frac{4(R-x)^2 - 4(R-x)(\xi-x)}{4(y-h)}} \right] \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u^+(\xi, h)\, d\xi .$$

Mais pour $\xi \leqq R/2$ nous avons

$$4(R-x)^2 - 4(R-x)\cdot(\xi - x) > 4(R-x)\cdot\frac{x}{2},$$

d'où

$$F(u^+) \geqq \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \left(1 - e^{-\frac{4(R-x)(x/2)}{4(y-h)}} \right) \cdot \int_r^{R/2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u^+(\xi, h)\, d\xi . \tag{12}$$

Mais de (11) il résulte que

$$\limsup_{R\to\infty} F(u^+) < +\infty$$

donc l'intégrale

$$\int_r^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u^+(\xi, h)\, d\xi$$

est convergente. On aura, par conséquence

$$\limsup_{R\to\infty} F(u) \geqq \limsup_{R\to\infty} F(u^+) - \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_r^R e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u^-(\xi, h)\, d\xi ,$$

ou encore, en utilisant (12),

$$\limsup_{R\to\infty} F(u) \geqq \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_r^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u(\xi, h)\, d\xi .$$

Donc en définitive,

$$u(x,y) \geqq -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi = r} - \frac{(x-r)\cdot u(r,\eta)}{2(y-\eta)^{3/2}} \right] d\eta \tag{13}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_r^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u(\xi, h)\, d\eta ,$$

où la dernieère intégrale converge absolument.

3. Appliquons maintenant la formule fondamentale (8) au rectangle B′Q′PA, symétrique de APQB par rapport au côté PA. On obtient

$$(14)\qquad 0=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-2r+R)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=2r-R}-\frac{(x-2r+R)\cdot u(2r-R,\eta)}{2(y-\eta)}\right]d\eta$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r}-\frac{(x-r)\cdot u(r,\eta)}{2(y-\eta)}\right]d\eta$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}}\int_{2r-R}^{r} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}\cdot u(\xi,h)\,d\xi\,.$$

Appliquons encore une fois la même formule (8) pour le même rectangle B′Q′PA, mais au point M″ (x'', y''), avec

$$x''=4r-2R-x\quad,\quad y''=y\,.$$

Il vient

$$(15)\qquad 0=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(2r-R-x)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=2r-R}-\frac{(2r-R-x)\cdot u(2r-R,\eta)}{2(y-\eta)}\right]d\eta$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(3r-2R-x)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r}-\frac{(3r-2R-x)\cdot u(r,\eta)}{2(y-\eta)}\right]d\eta$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}}\int_{2r-R}^{r} e^{-\frac{(4r-2R-x-\xi)^2}{4(y-h)}}\cdot u(\xi,h)\,d\xi\,.$$

Retranchons (15) de (14). On obtient

$$(16)\qquad 0=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r}-\frac{(x-r)\cdot u(r,\eta)}{2(y-\eta)}\right]d\eta$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-2r+R)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\cdot\frac{(x-2r+R)\cdot u(2r-R,\eta)}{y-\eta}\,d\eta$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(3r-2R-x)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r}-\frac{(3r-2R-x)\cdot u(r,\eta)}{2(y-\eta)}\right]d\eta$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}}\int_{2r-R}^{r} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}\cdot u(\xi,h)\,d\xi-\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}}\int_{2r-R}^{r} e^{-\frac{(4r-2R-x-\xi)^2}{2(y-h)}}\cdot u(\xi,h)\,d\xi\,.$$

Un raisonnement analogue à celui qui nous a permis d'obtenir l'inegalité (13) nous permettra, en partant de (16), d'obtenir une nouvelle inégalité. En effet, il est facile de voir que la troisième intégrale du second membre de (16) tend vers zéro avec $1/R$.

Quant à la seconde intégrale, en posant $u = u^+ - u^-$, elle se décompose en une différence de deux intégrales *positives*. La seconde de ces intégrales tend vers zéro avec $1/R$. En effet, en tenant compte de l'hypothèse (4 *bis*), on a

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left|\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-2r+R)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\cdot\frac{(x-2r+R)\cdot u^-(2r-R,\eta)}{y-\eta}\,d\eta\right| \leqq$$

$$\frac{M}{2\sqrt{\pi}}\, e^{K(R-2r)^2}\cdot\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-2r+R)^2}{4(y-\eta)}}}{(y-\eta)^{3/2}}\cdot(x-2r+R)\,d\eta$$

et le dernier membre tend bien vers zéro avec $1/R$. Ainsi, en faisant dans (16), $R\to\infty$ et en négligeant au second membre la deuxième intégrale, on obtient l'inégalité

$$(16') \qquad 0 \geqq \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(x-r)\cdot u(r,\eta)}{2(y-\eta)}\right]d\eta$$

$$+\limsup_{R\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}}\left[\int_{2r-R}^r e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}\cdot u(\xi,h)\,d\xi - \int_{2r-R}^r e^{-\frac{(4r-2R-x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}\cdot u(\xi,h)\,d\xi\right].$$

Notons par $G(u)$ l'expression entre les crochets, figurant au second terme de la somme précédente. On a

$$G(u) = G(u^+) - G(u^-).$$

En vertu de (4 *bis*), on aura

$$(16'') \qquad \lim_{R\to\infty} G(u^-) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^r \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}}{\sqrt{y-h}}\,u^-(\xi,h)\,d\xi.$$

Observons maintenant que pour

$$2r - R \leqq \xi \leqq r$$

on a

$$(4r-2R-x-\xi)^2-(x-\xi)^2 = 4(x-2r+R)^2-4(x-2r+R)(x-\xi) \geqq 0,$$

donc, pour R suffisamment grand,

$$\mathrm{G}(u^+) \geqq \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_{\frac{2r-\mathrm{R}}{2}}^{r} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} - e^{-\frac{(4r-2\mathrm{R}-x-\xi)^2}{4(y-h)}} \right) \cdot u^+(\xi, h)\, d\xi \geqq$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \left(1 - e^{-\frac{2(x-2r+\mathrm{R})x}{4(y-h)}} \right) \cdot \int_{\frac{2r-\mathrm{R}}{2}}^{r} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u^+(\xi, h)\, d\xi .$$

On en déduit, en tenant compte de (16′) et (16″), que l'intégrale

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_{\infty}^{r} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u^+(\xi, h)\, d\xi$$

converge absolument. L'inégalité (16′) devient donc

$$(17) \qquad 0 \geqq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-h)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=r} - \frac{(x-r)\cdot u(r, \eta)}{2(y-\eta)} \right] d\eta$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_{-\infty}^{r} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u(\xi, h)\, d\xi .$$

En ajoutant les inégalités (13) et (17) on obtient l'inégalité

$$(18) \qquad u(x, y) \geqq \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u(\xi, h)\, d\xi ,$$

valable pour

$$-\infty < x < +\infty \quad , \quad 0 \leqq h < y \leqq \delta ,$$

l'intégrale au second membre convergeant absolument.

4. Dans le cas particulier $x = 0$, $y = \delta$, la formule (18) devient, en tenant compte que $u = u^+ + u^-$ et en utilisant l'hypothèse (4 *bis*),

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4(\delta-h)}} \cdot |u(\xi, h)|\, d\xi \leqq u(0, \delta) + \frac{\mathrm{M}}{\sqrt{(\delta-h)\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4(\delta-h)}} \cdot e^{\mathrm{K}\xi^2}\, d\xi ,$$

donc

$$(19) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4(\delta-h)}} \cdot |u(\xi, h)|\, d\xi < \mathrm{C} ,$$

où $0 \leqq h < \delta$ et C est indépendant de h. Ainsi, si dans la formule (10) nous faisons $R \to \infty$, nous obtenons

$$(20) \qquad u(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(x-r)\cdot u(r,\eta)}{2(y-\eta)} \right] d\eta$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}} \int_r^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \cdot u(\xi, h)\, d\xi - \lim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}} \frac{(x-R)\cdot u(R,\eta)}{(y-\eta)^{3/2}} d\eta .$$

Désignons par $I(R)$ la dernière intégrale.

On a

$$\int_r^\infty |I(R)|\, dR \leqq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \int_r^\infty \frac{e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}} \cdot |R-x|}{(y-\eta)^{3/2}} \cdot |u(R,\eta)|\, d\eta\, dR \leqq$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \int_r^\infty \frac{|R-x|\cdot e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)} + \frac{R^2}{4(\delta-\eta)}}}{(y-\eta)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{R^2}{4(\delta-\eta)}} \cdot |u(R,\eta)|\, d\eta\, dR \leqq$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}}}{(y-\eta)^{3/2}} \left(\int_r^\infty |R-x|\cdot e^{-\frac{R^2-2Rx}{4(y-\eta)} + \frac{R^2}{4(\delta-\eta)}} \cdot e^{-\frac{R^2}{4(\delta-\eta)}} \cdot |u(R,\eta)|\, dR \right) d\eta .$$

Mais, évidemment,

$$|R-x|\cdot e^{-\frac{R^2-2Rx}{4(y-\eta)} + \frac{R^2}{4(\delta-\eta)}} \leqq C_1 < \infty ,$$

quels que soient

$$r \leqq R < \infty \quad , \quad h \leqq \eta < y < \delta .$$

Ainsi, pour $y < \delta$,

$$\int_r^\infty |I(R)|\, dR \leqq \frac{CC_1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{x^2}{4(y-\eta)}}}{(y-\eta)^{3/2}} d\eta < +\infty .$$

Par suite, il existe une suite $\{R_k\}$, telle que $R_k \to \infty$ et que

$$\lim I(R_k) = 0 .$$

Mais, d'après la formule (20) $\lim I(R)$ existe, donc

$$\lim I(R) = 0$$

et la formule (20) devient

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(x-r)\cdot u(r,\eta)}{2(y-\eta)}\right] d\eta$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}}\int_r^\infty e^{-\frac{(x-\xi)}{4(y-h)}}\cdot u(\xi,h)\, d\xi .$$

5. Refaisons les calculs précédents, en partant, cette fois–ci non pas de la formule (10), mais de la formule (16).

On obtient alors

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\cdot\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(x-r)\cdot u(r,\eta)}{2(y-\eta)}\right] d\eta$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}}\int_{-\infty}^r e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}\cdot u(\xi,h)\, d\xi .$$

Ajoutons (21) et (22). On obtient finalement le

THEOREME I (*Théorème de représentation*):

Soit $u(x,y)$ *une solution de l'équation de la chaleur* (1) *dans la bande* (2), *continue dans la bande fermée* (3), *vérifiant dans cette bande l'inégalité* (4 *bis*), *où* $K < \frac{1}{4\delta}$. *Alors, pour tout*

$$0 \leqq h < y < \delta$$

on a la formule de représentation de Poisson

$$u(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-h)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}\cdot u(\xi,h)\, d\xi .$$

6. Le théorème précédent nous permet d'obtenir immédiatement le théorème d'unicité énoncé au no. 1. Soient, en effet, u_1 et u_2 deux solutions de (1) dans la bande

(23) $$-\infty < x < \infty \quad , \quad 0 < y < Y,$$

continues sur la bande fermée et telles que

$$u_1(x,y) \geqq -M_1 e^{K_1 x^2} \quad , \quad u_2(x,y) \geqq -M_2 e^{K_2 x^2},$$

avec K_1, K_2, M_1, M_2 positifs.

Nous supposons, de plus, que

(24) $$u_1(x,0) = u_2(x,0), \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Posons $K = \max\{K_1, K_2\}$. En appliquant le théorème de représentation a u_1 et à u_2 pour $y < \frac{1}{4K}$, nous avons

$$u_i(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} \cdot u_i(\xi, 0)\, d\xi, \qquad (i = 1, 2),$$

donc, en vertu de (24),

$$u_1(x, y) = u_2(x, y), \qquad \left(-\infty < x < \infty, 0 \leqq y < \frac{1}{4K}\right),$$

d'où, par continuité,

$$u_1\left(x, \frac{1}{4K}\right) = u_2\left(x, \frac{1}{4K}\right).$$

Par suite, en appliquant à u_1 et à u_2 la formule de représentation dans la bande $-\infty < x < \infty$, $\frac{1}{4K} \leqq y < \frac{2}{4K}$, on obtient

$$u_1(x, y) = u_2(x, y), \qquad \left(-\infty < x < \infty, 0 \leqq y < \frac{2}{4K}\right).$$

Par un nombre fini de pas, on arrive à l'égalité

$$u_1(x, y) = u_2(x, y)$$

dans toute la bande (23) et cela termine la démonstration du théorème d'unicité.

LITTÉRATURE.

[1] S. D. EIDELMAN, *Otzenki rescenii paraboliceskih sistem i nekotorye ih primenenia*, «Mat. Sbornik», *33*, 359–382 (1953).

[2] I. M. GELFAND et G. E. SILOV, *Fonctions généralisées*. Vol. III: *Quelques problèmes de la théorie des équations différentielles* (Moscou 1958).

[3] MIRON NICOLESCO, *Sur l'équation de la chaleur*, «Commentarii Math. Helv.», *10*, 3–17 (1937).

[4] MAURO PICONE, *Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera, conduttore, isotropo e omogeneo*, «Math. Annalen», *10*, 701–712 (1929).

[5] A. TIHONOV, *Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur*, «Math. Sbornik», *42*, 199–216 (1935).

[6] D. V. WIDDER, *Positive temperatures in an infinite rod*, «Trans. Amer. Math. Soc.», *55*, 85–95 (1944).

RÉSUMÉ. — En reprenant une technique utilisée dans le Mémoire [3] de l'un des auteurs, on parvient à affaiblir sensiblement les conditions de validité de la représentation de Poisson pour le problème de Cauchy concernant l'équation de la chaleur. Comme conséquence immédiate on en obtient un théorème d'unicité englobant à la fois le théorème d'unicité de Tichonov et celui plus récent de D. V. Widder.