
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

UGO PANICHI

Forze ioniche e quadrilateri proiettivi

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 38 (1965), n.4, p. 457–462.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_4_457_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Cristallografia. — *Forze ioniche e quadrilateri proiettivi.* Nota (*)
del Socio UGO PANICHI.

Riferendoci ad una fila di un piano reticolare, e ad un tratto di essa $AOB = 6m\sigma$, la fig. 1 considera il tratto $AO = 12$; ed allora il quarto armonico T del gruppo A, O, B, viene raggiunto (quadrilatero PQCD) con la diagonale PQ che cade in T a $1/3$ di OA; indi considera il gruppo A'B', con $A'O' = 9$, ed il quarto armonico corrisponde al quadrilatero P'Q'C'D', e la diagonale P'Q' cade nel punto T' ad $1/3$ del raggio O'A'.

Ora, partendo in ciascun quadrilatero dai vertici P e P', con due segmenti paralleli ai lati inferiori, si ottengono i parallelogrammi PQEF, P'Q'E'F', con diagonali eguali alle PQ e P'Q'. Nella figura sono inoltre segnati PQHK e P'Q'H'K' con lati paralleli alle diagonali PQ, P'Q'. Analoghe figure poi sono possibili in relazione ad ogni nodo.

Esse però, pur inducendo a pensare alle forze collegate con ogni particella, sono dovute al metodo proiettivo da noi seguito; peraltro è supponibile che, come nel parallelogramma della composizione di due forze è armonico il fascio costituito dalla diagonale con le direzioni dei lati e dell'altra diagonale, così ai nostri parallelogrammi possa ammettersi un vincolo fisico: ma in ciò non è la espressione della proprietà reciproca, e questa Nota tenta di esporre come tale vincolo può verificarsi.

La fig. 2 e la fig. 3, sono dirette a fornire, per via proiettiva, una rappresentazione grafica di forze tra coppie di particelle vicine e poste sopra due file parallele. Siano P ed O i centri di queste particelle, e Q il punto di mezzo di PO; le file abbiano uno stesso ritmo σ .

Assumiamo ora uguali intervalli intorno ad O; allora siano $TO = T'O$ e e T e T' i quarti armonici nei gruppi AOB e BOA; tirando le rette PA, PB, PT, PT' e AQ, BQ fino alle intersezioni E, C, e poi i raggi ODC, OFE, nascono così i due quadrilateri PQCD e PQEF.

Ciò fatto, e con analoghe operazioni (facendo centro di proiezione il punto O e tracciando solo i risultanti punti nella metà inferiore della figura), indichiamo così i due quadrilateri OQC_0D_0 , OQE_0F_0 , simmetrici rispetto ai due già ottenuti (vertice comune il punto Q).

Qui vediamo che in ogni quadrilatero le coppie di lati opposti s'incontrano sulla rispettiva fila; e infatti ogni fila reticolare è la terza diagonale di ciascuno dei corrispondenti quadrilateri.

Chiamando U l'intersezione fra CD e C_0D_0 , e V quella fra EF ed E_0F_0 , la figura OPUV è un rombo, circondato dalle diagonali dei quadrilateri; la distanza

(*) Presentata nella seduta del 10 aprile 1965.

UV corrisponde a 6σ . Chiamando M ed N le intersezioni fra i lati dei quadrilateri (fig. 3), anche POMN è un rombo e la distanza MN corrisponde a 12σ .

Tirando dai punti M, N i segmenti LJ e L'J' paralleli a PO, e poi le LN, ML' (intersezione R) e le JN, J'M (intersezione S), i punti R, S sono vertici - insieme con U e V - del rombo RSUV, i cui lati sono paralleli ai lati di POMN. Mediante il rombo RSUV si può ripetere il procedimento per un altro rombo interno ad esso.

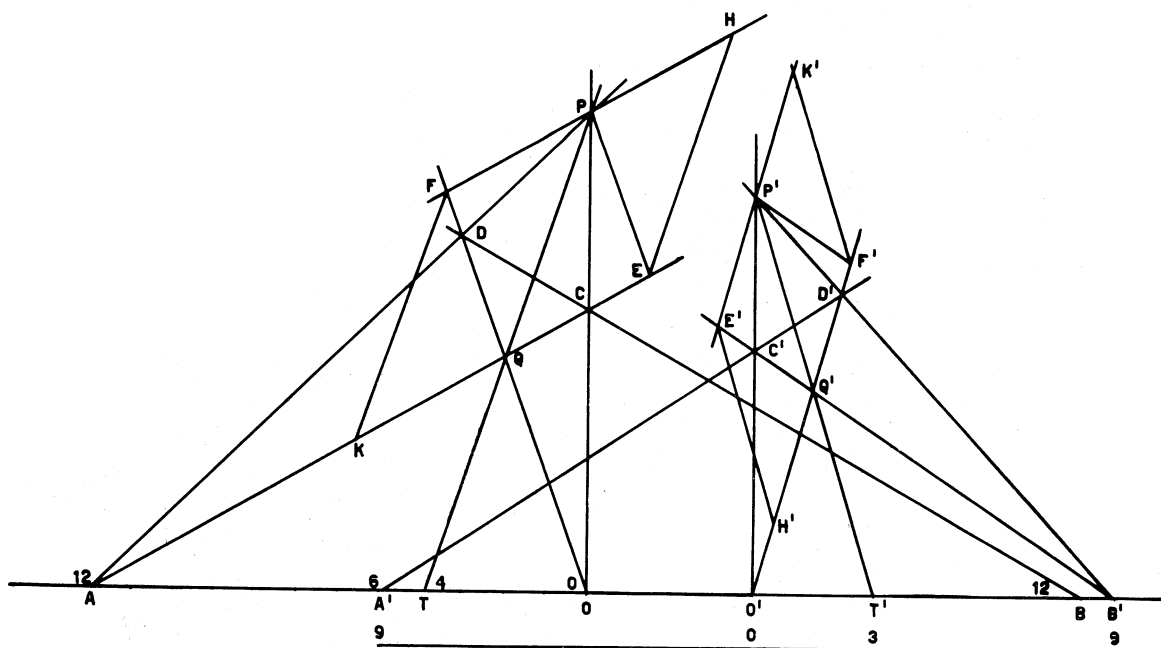


Fig. 1.

E facciamo ora l'ipotesi che il segmento PO sia anche l'intersezione del piano della figura con un altro piano perpendicolare ad essa, e nel quale due file parallele, passanti rispettivamente per P ed O, siano dotate esse pure del ritmo σ . Ciò semplifica il campo iniziale, nel quale possiamo dapprima supporre $MN = PO$ e i suddetti rombi divenuti quadrati. Ed allora nel complesso dei due piani i due quadrati con diagonale a comune PO sono gli spigoli di un ottaedro.

Ora sono da considerare le intensità delle forze elettrostatiche, crescenti con le cariche ed in ragione inversa del quadrato dei raggi; le distanze come PO sono dell'ordine dei milionesimi di mm; le forze sono esprimibili in dine, e quindi in milligrammi ed anche in mm^3 .

Nel piano della figura la dine, oltre ad occupare una superficie, esercita una pressione; ora noi possiamo, in un primo tempo, supporre che più dine adiacenti (e non sovrapposte) occupino un'area con uniforme pressione; e che, per rappresentare la presenza di una dine possa bastare la sua unitaria super-

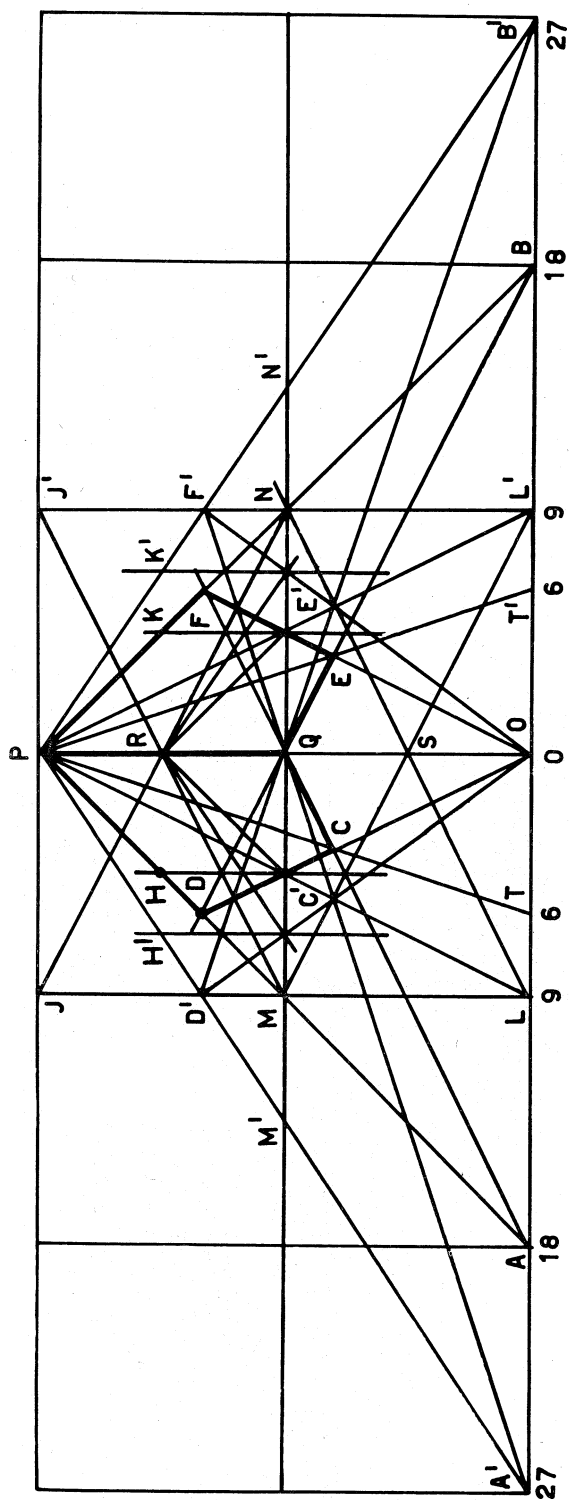


Fig. 2.

(La porzione della fig. 2, che è compresa fra i punti M ed N, è ingrandita e completata nella fig. 3).

fice basale. Ed allora possiamo (prescindendo da variabili spessori rispetto al piano della figura) considerare due distinte operazioni, le quali vengono, per brevità, rispettivamente espresse, a destra (fig. 3) col parallelogramma PRVK, e a sinistra con PRUH.

Nella operazione di destra i due lati PR, PK sono divisi in egual numero di parti eguali ($n = 5$ nella figura); sono tracciate le parallele ai lati; e, considerando l'area minore $P_{xyz} = 1$, risultano per i lati 2, 3, 4, 5, le aree $Pz_2 = 4$, $Pz_3 = 9$, $Pz_4 = 16$, $Pz_5 = 25$. Le diagonali dei singoli parallelogrammi sono tutte sovrapposte a PV. E così, se $Pz_1 = 1$ esprime simbolicamente una unità di forza, possiamo rappresentare come parallelogrammi, anche le forze.

Riferiamoci ora al parallelogramma di sinistra; PR e PU possono rispettivamente corrispondere a valori d ed F ; supponiamo che i lati non contengano

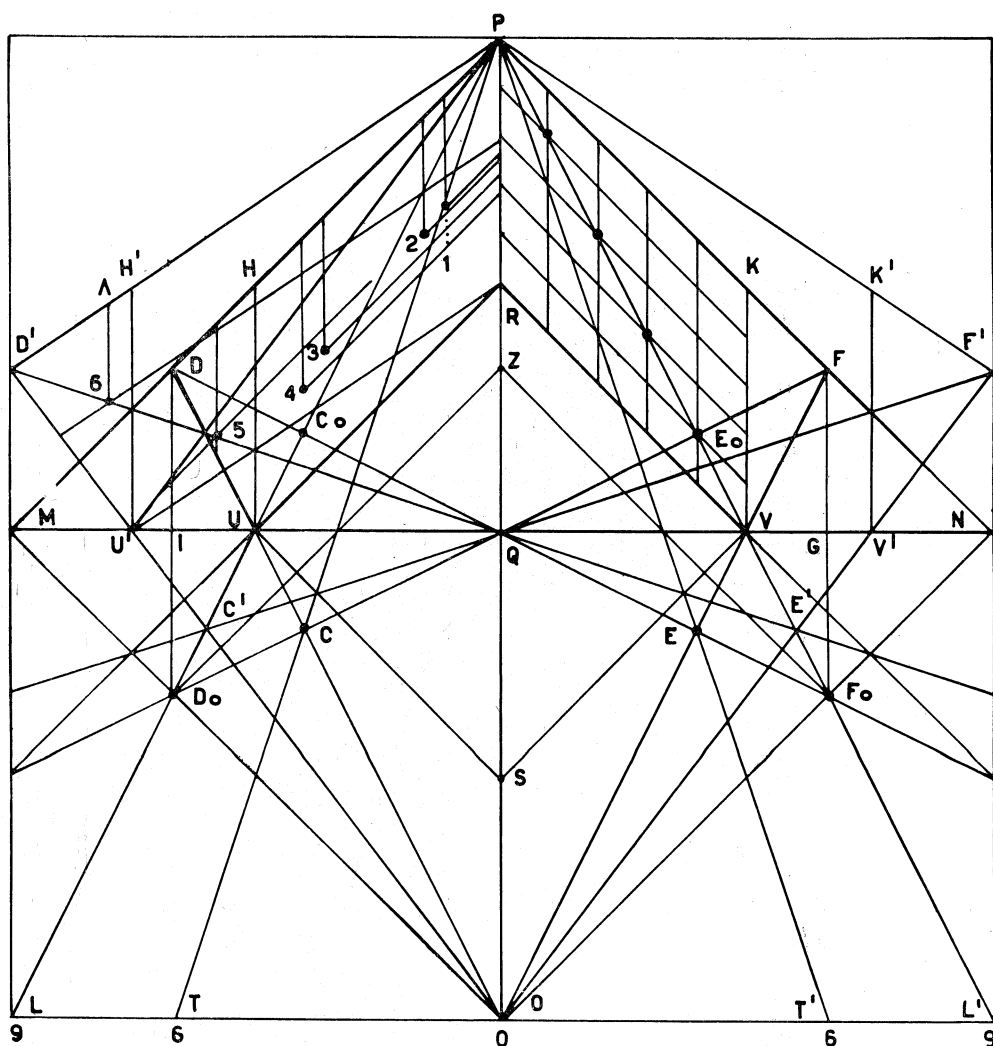


Fig. 3.

egual numero di suddivisioni; e se tal numero è maggiore nel lato PH, le diagonali da P si avanzano fra PU e PC; se invece sono più numerose su PH, le diagonali si avanzano fra PU e PR. Nel primo caso son più rapidi gli aumenti di forza, e meno rapidi nel secondo caso.

La figura può rappresentare coppie obbedienti alla simmetria cubica, o almeno a rapporto parametrico = 1; ma ora supporremo $QM > QP$; se, ad esempio poniamo che sia $QP/QM = 0,64$ come nel rutilo, o 0,67 come nella cassiterite, possiamo anche porre $QP = 1$, e, approssimato, $QM = 1,5$. Per ciò, invece di $OT = 1/3$ $OA = 6$, possiamo porre $OT' = 1/3$ $OA' = 9$; tracciando ora PA' , PT' , PB' , ecc., come si è fatto partendo da OT, si ottengono le intersezioni C' , D' , e poi U' , V' ; e così arriviamo ad avere nuovi quadrilateri, con analoga distribuzione di aree e distanze.

Con riferimento al gruppo di minerali che già osservai, e con i calcoli eseguiti da C. Reale ⁽¹⁾, ecco qualche valore di d (Å) e di F (dine):

	KCl	NaCl	Ag ₂ S	CaF ₂	PbS	HgS	ZnS	SnO ₂	TiO ₂
d	3,18	2,79	2,52	2,38	2,80	2,56	2,40	2,12	2,11
F	$2,278 \cdot 10^4$	2,960	7,250	8,135	11,755	14,06	16,000	41,011	41,400

Osserviamo che, mentre le F hanno rapido aumento dalla silvite fino al rutilo, ben piccola variazione subiscono i valori d . Vediamo ora tali variazioni nella distribuzione della fig. 3, e dividiamo l'operazione in due parti: prima sia $MN=PO$, e poi $QM > QP$; in ambedue i casi, insieme con l'esame del rapporto tra forze e distanze, consideriamo il prodotto W delle valenze.

1° Per segnare nel disegno qualche numero di questo prospetto, possiamo suddividere i lati di PRHU in parti uguali: sopra PR i valori d e le F sopra PH. Quanto a PR, dividendo PQ in dieci parti, sarà $PR = 5$; quanto a PH (essendo circa 8 la F della fluorite) poniamo $PH = 10$. Per la *silvite* (valori approssimati) abbiamo 3,18 e 2,28; per il *salgemma* 2,8 e 2,9; per tutti due $W=1$; per l'*argentite* 2,5 e 7,2; per la *fluorite* 2,4 e 8,1; e in ambedue $W=2$. Le diagonali da P dei primi due parallelogrammi hanno direzioni quasi coincidenti con quella di PU (sulla destra di essa); le altre due ne sono lievemente discoste (a sinistra); alle quattro diagonali corrispondono i punti 1, 2, 3, 4.

Come esempio di valori $F > 10$, si può prolungare PH; prendiamo $F = 12$, approssimato valore per la *galena*; ora il valore d per la galena (2,8) si può, nel disegno, ottenere prolungando il tratto già indicato per il salgemma; e così si determina il punto 5.

2° Abbiamo visto l'esempio *cassiterite-rutilo* riguardo al rapporto parametrico, che in ambedue è pressoché eguale a 1,5; ma i valori F vengono ora

(1) Ved. anche mia Nota precedente - Lincei 1964.

rappresentati sul lato PM' del parallelogramma $PRU'H'$; le due diagonali per cassiterite e rutilo hanno la stessa direzione, molto a sinistra di PU' . La suddivisione del lato delle forze è aumentabile col numero di esse; nella figura PD' è suddiviso in 50 parti, e PH' ne è pressoché $4/5$; e nasce il punto 6.

Possiamo pensare che un raggio del fascio di centro P ruoti da PO a PU , $PU'PM'$; esso incontrerà i punti da 1 a 6, e, in ordine di crescente grandezza, le diagonali dalla silvite al rutilo, ed i valori W delle valenze. Altrettanto si può supporre per un raggio che da OP ruoti verso OU , OU' , OM' .

Per considerare ora la variabile ripartizione delle aree e delle forze, gioverà lo studio di vari altri esempi; ma occorre altresì pensare alla supposta uniformità della pressione sul piano fin qui esaminato. Partendo ancora dal centro P , e dal fascio piano già descritto, passiamo ora alla stella di piani armonici possibili nello spazio reticolare, stella con asse PO . Ognuno dei suddetti raggi fa anche parte di una superficie conica, la quale segna una circonferenza sopra ogni piano normale a quello della figura; e si ha così in tali piani una serie di circonferenze concentriche; e gli intervalli interposti fra esse sono sempre più stretti avvicinandosi all'asse PO . E poiché le forze agenti sui successivi intervalli sono realmente dovute al connubio superficie-pressione, è ammissibile che la pressione aumenti nelle aree più strette, per sovrapposizione e quindi per crescenti spessori.

Ora le tracce che corrispondono alle dette sezioni, si trovano distribuite anche nel piano normale a PO e passante per la fila AB ; ed esse coincidono (fig. 2) con tutti i quarti armonici segnati sulla stessa fila; e ciò appare come un legame fra i campi armonico ed energetico.

In conclusione, sia quando abbiamo ammesso una azione uniforme, sia ora ammettendo una azione progressiva, la duplice trama dei raggi e la cornice dei quadrilateri che ordinatamente interessano il complesso di forze, sembrano tali da esprimere una loro influenza orientatrice, testimoniando altresì il senso armonico insito nella formula di Coulomb.