
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

CATALDO AGOSTINELLI

Moto lento stazionario magnetodinamico di un liquido viscoso elettricamente conduttore in un involucro sferico. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 38 (1965), n.4, p. 448–453.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_4_448_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Magnetoidrodinamica. — *Moto lento stazionario magnetodinamico di un liquido viscoso elettricamente conduttore in un involucro sferico.*
Nota II (*) del Corrisp. CATALDO AGOSTINELLI.

1. In questa seconda Nota, partendo dalle equazioni stabilite nella Nota I per il moto lento stazionario di un liquido viscoso, elettricamente conduttore contenuto in un involucro rigido sferico e immersa in un campo magnetico uniforme, dimostro intanto che la velocità delle particelle fluide soddisfa a un'equazione differenziale del 4° ordine che è la stessa di quella alla quale soddisfano il vettore vortice e il vettore densità di corrente di conduzione.

Successivamente mi propongo di determinare la velocità delle particelle fluide e il campo magnetico indotto in un punto interno alla sfera, essendo assegnati in modo qualunque i loro valori sulla superficie. La questione viene ridotta alla risoluzione di due equazioni funzionali, dopo di che risulta determinata esplicitamente anche la pressione.

Nel caso particolare in cui il coefficiente di viscosità del fluido e il coefficiente di diffusività magnetica sono sufficientemente grandi da poter trascurare i termini di ordine superiore al 2° rispetto ai loro inversi, la soluzione del problema viene ottenuta esplicitamente mediante integrali definiti.

Se poi l'involucro sferico in cui è contenuto il fluido è animato da un moto di traslazione uniforme e di un moto rotatorio assiale, pure uniforme, allora, poiché il liquido aderisce alla parete dell'involucro, ed ha ivi la stessa velocità le formule ottenute si semplificano notevolmente.

2. Come abbiamo visto nella Nota I, le equazioni del moto lento stazionario di una massa liquida elettricamente conduttrice, immersa in un campo magnetico uniforme H_0 , nella cui direzione abbiamo scelto l'asse z , e soggetta a forze di massa che derivano da un potenziale U , si riducono alle seguenti

$$(I_a) \quad k\Delta_2 \mathbf{v} = \text{grad} \left(\frac{p}{\rho_0} - U + V_a^2 h_z \right) - V_a^2 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z}$$

$$(I_b) \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$(I_c) \quad \eta\Delta_2 \mathbf{h} = - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$$

$$(I_d) \quad \text{div } \mathbf{h} = 0,$$

dove i simboli hanno il significato ivi indicato.

(*) Presentata nella seduta del 13 marzo 1965.

Prendendo la divergenza di ambo i membri dell'equazione (I_a) , in virtù della (I_b) e (I_d) si deduce

$$\Delta_2 \left(\frac{p}{\rho_0} - U + V_a^2 h_z \right) = 0,$$

e quindi la funzione

$$(2) \quad \Pi = \frac{p}{\rho_0} - U + V_a^2 h_z$$

è armonica. Ne segue che se si applica il Δ_2 di Laplace ed ambo i membri della (I_a) , e si tiene conto della (I_c) , si ha che la velocità $\mathbf{v}$ delle particelle fluide soddisfa alla seguente equazione alle derivate parziali del 4° ordine

$$(3) \quad \Delta_2 \Delta_2 \mathbf{v} = \frac{V_a^2}{k\eta} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2}$$

che è la medesima alla quale soddisfano il vettore vortice e il vettore densità di corrente di conduzione.

3. Ci proponiamo di determinare ora, in questa Nota II, la velocità $\mathbf{v}$ delle particelle fluide e il campo magnetico indotto $\mathbf{h}$ in ogni punto interno al volume S occupato dalla massa fluida, nel caso in cui il moto avviene internamente ad un involucro sferico rigido di raggio R , animato di un dato movimento, essendo assegnati i valori $\mathbf{v}_\sigma$ di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{h}_\sigma$ di $\mathbf{h}$ sulla superficie σ della sfera. Poiché si tratta di un liquido viscoso ed esso bagna le pareti dell'involucro che lo contiene la velocità $\mathbf{v}_\sigma$ nei punti della superficie σ sarà uguale a quella di cui è animato lo stesso involucro.

Osserviamo che in virtù del teorema della divergenza i valori $\mathbf{v}_\sigma$ e $\mathbf{h}_\sigma$ della velocità e del campo magnetico indotto, assegnati in superficie, devono verificare le condizioni

$$\int_{\sigma} \mathbf{v}_\sigma \times \mathbf{n} d\sigma = 0, \quad \int_{\sigma} \mathbf{h}_\sigma \times \mathbf{n} d\sigma = 0,$$

dove $\mathbf{n}$ è il versore della normale a σ .

Ciò premesso incominciamo a considerare il sistema

$$(41) \quad k\Delta_2 \mathbf{u} = \text{grad } \Pi, \quad (\text{in } S),$$

$$(42) \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}_\sigma, \quad (\text{sopra } \sigma).$$

Indicando con $\mathbf{v}_1$ il vettore armonico in S e che su σ coincide con $\mathbf{v}_\sigma$, poniamo

$$(5) \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + (\rho^2 - R^2) \text{grad } \varphi,$$

dove ρ è la distanza di un punto P dal centro O della sfera e φ è una funzione armonica da determinare. Si ricava dalla (5)

$$\Delta_2 \mathbf{u} = \Delta_2 [(\rho^2 - R^2) \text{grad } \varphi] = 6 \text{grad } \varphi + 4\rho \frac{\partial \text{grad } \varphi}{\partial \rho} = \text{grad} \left(2\varphi + 4\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right),$$

e quindi, per la (4₁),

$$\text{grad} \left(2\varphi + 4\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{k} \text{grad } \Pi,$$

da cui, a meno di una costante additiva, che non ha influenza, si ha

$$(6) \quad 2\varphi + 4\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{1}{k} \Pi.$$

Moltiplicando ambo i membri della (6) per $\frac{1}{4} \rho^{-1/2}$, essa si può scrivere

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^{1/2} \varphi) = \frac{1}{4k} \rho^{-1/2} \Pi$$

da cui

$$(7) \quad \varphi = \frac{1}{4k} \rho^{-1/2} \int_0^\rho \rho^{-1/2} \Pi d\rho$$

e questa funzione al pari di Π è armonica. In tal modo è determinato il vettore $\mathbf{u}$ in funzione di Π .

Se ora indichiamo con $\mathbf{w}$ il vettore tale che

$$(8) \quad k \Delta_2 \mathbf{w} = -V_a^2 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z}, \quad (\text{in } S) \quad ; \quad \mathbf{w} = 0, \quad (\text{sopra } \sigma),$$

è chiaro che sarà

$$(9) \quad \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + (\rho^2 - R^2) \text{grad } \varphi + \mathbf{w},$$

poiché, così facendo, per le (4) e (8) risulta verificata la (I_a) e la condizione in superficie $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\sigma$.

Il vettore armonico $\mathbf{v}_1$ per la formula di Poisson è dato da

$$(10) \quad \mathbf{v}_1(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_\sigma \frac{\mathbf{v}_\sigma(M)}{r_{PM}^3} d\sigma_M,$$

mentre il vettore $\mathbf{w}$, definito dalle equazioni (8), è espresso dalla relazione

$$(11) \quad \mathbf{w}(P) = \frac{V_a^2}{4\pi k} \int_S G(P, M) \frac{\partial \mathbf{h}(M)}{\partial z_1} dS_M,$$

dove $G(P, M)$ è la funzione di Green per la sfera, già considerata nella Nota I.

Occorre ora eliminare dall'espressione di φ la funzione Π . Prendiamo per questo la divergenza di ambo i membri della (9). Poiché $\text{div } \mathbf{v} = 0$, si ricava

$$(12) \quad 2\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -\text{div}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}).$$

Il primo membro di questa equazione si annulla nel centro della sfera. Occorre verificare che anche il secondo membro si annulla. Questo secondo membro è, come il primo, una funzione armonica, ed è noto che il valore

di una funzione armonica nel centro di una sfera è uguale alla media dei valori nell'interno della sfera. Basta allora verificare che

$$\int_S \operatorname{div} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}) dS = \int_\sigma (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}) \times \mathbf{n} d\sigma = 0.$$

Poiché $\mathbf{w}$ si annulla su σ , e su σ è $\int_\sigma \mathbf{v}_1 \times \mathbf{n} d\sigma = \int_\sigma \mathbf{v}_\sigma \times \mathbf{n} d\sigma = 0$, l'equazione precedente risulta verificata.

Dalla (12), integrando, si deduce, a meno di una costante additiva che si può supporre nulla,

$$(13) \quad \varphi(P) = -\frac{1}{2} \int_0^Q \frac{1}{\rho} \operatorname{div}_P (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}) d\rho.$$

Sostituendo nella (9) abbiamo

$$(14) \quad \mathbf{v}(P) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{w} + \frac{1}{2} (R^2 - \rho^2) \operatorname{grad}_P \int_0^Q \frac{1}{\rho} \operatorname{div}_P (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}) d\rho,$$

dove i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{w}$ sono rispettivamente espressi dalle (10) e (11). Dalla (6), avendo riguardo alla (12) e alla (13), ricaviamo inoltre

$$\Pi = -2k \operatorname{div} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}) - k \int_0^Q \frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}) d\rho,$$

e quindi per la (2) abbiamo la pressione

$$(15) \quad \frac{p}{\rho_0} = U - V_a^2 h_s - 2k \operatorname{div} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}) - k \int_0^Q \frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}) d\rho.$$

4. Per la determinazione del campo magnetico indotto $\mathbf{h}$, di cui è assegnato il valore $\mathbf{h}_\sigma$ in superficie, abbiamo ora le equazioni (1c) e (1d). Poniamo per questo $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$, con $\mathbf{h}_1$ vettore armonico che sulla superficie σ sia uguale ad $\mathbf{h}_\sigma$, ed $\mathbf{h}_2$ soddisfacente al sistema

$$(16) \quad \Delta_2 \mathbf{h}_2 = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}, \quad (\text{in } S) \quad ; \quad \mathbf{h}_2 = 0, \quad (\text{sopra } \sigma).$$

Risulta

$$(17) \quad \mathbf{h}_1(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_\sigma \frac{\mathbf{h}_\sigma(M)}{r_{PM}^3} d\sigma_M$$

$$(18) \quad \mathbf{h}_2(P) = \frac{1}{4\pi\eta} \int_S G(P, M) \frac{\partial \mathbf{v}^{(M)}}{\partial z_1} dS_M$$

e quindi

$$(19) \quad \mathbf{h}(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_\sigma \frac{\mathbf{h}_\sigma(M)}{r_{PM}^3} d\sigma_M + \frac{1}{4\pi\eta} \int_S G(P, M) \frac{\partial \mathbf{v}^{(M)}}{\partial z_1} dS_M.$$

Sostituendo la (19) nella (11), e ricordando la formula di trasformazione (16) della Nota I, abbiamo

$$(20) \quad \mathbf{w}(P) = \frac{V_a^2}{4\pi k} \int_S G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{R^2 - \rho_1^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{h}_{\sigma}(Q)}{r_{MQ}^3} d\sigma_Q \right] dS_M + \\ + \frac{V_a^2}{8\pi k \eta} \int_S G(P, M) \cdot (z_1 - z) \frac{\partial \mathbf{v}(M)}{\partial z_1} dS_M.$$

Ponendo quindi nella (14) in luogo di $\mathbf{w}$ l'espressione (20), si ha un'equazione funzionale in cui è incognita la sola velocità $\mathbf{v}$, la quale viene così definita per mezzo dei valori $\mathbf{v}_{\sigma}$ di $\mathbf{v}$, e $\mathbf{h}_{\sigma}$ di $\mathbf{h}$ in superficie. Determinata la velocità $\mathbf{v}$ la (19) fornisce senz'altro il campo magnetico $\mathbf{h}$, e la (15) dà la pressione p .

5. Nel caso particolare in cui il coefficiente di viscosità k e il coefficiente di diffusività magnetica η siano sufficientemente grandi da poter trascurare i termini di ordine superiore rispetto a $1/(k\eta)$, si può porre

$$(21) \quad \mathbf{w}(P) = \frac{V_a^2}{4\pi k} \int_S G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{R^2 - \rho_1^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{h}_{\sigma}(Q)}{r_{MQ}^3} d\sigma_Q \right] dS_M + \\ + \frac{V_a^2}{8\pi k \eta} \int_S G(P, M) \cdot (z_1 - z) \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\mathbf{v}_1(M) + \frac{1}{2} (R^2 - \rho_1^2) \text{grad}_M \int_0^{\rho_1} \frac{1}{\rho_1} \text{div}_M \mathbf{v}_1 \cdot d\rho_1 \right] dS_M.$$

dove $\mathbf{v}_1$ è ancora espresso dalla (10). Sostituendo questo valore di $\mathbf{w}$ nella (14), si ha esplicitamente il vettore velocità $\mathbf{v}$ espresso per mezzo dei dati in superficie.

Inoltre, ponendo per semplicità

$$(22) \quad \mathbf{w}_1(P) = \int_S G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{R^2 - \rho_1^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{h}_{\sigma}(Q)}{r_{MQ}^3} d\sigma_Q \right] dS_M,$$

dalla (19) nel caso considerato si ricava

$$(23) \quad \mathbf{h}(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{h}_{\sigma}(M)}{r_{PM}^3} d\sigma_M + \\ + \frac{1}{4\pi \eta} \int_S G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\mathbf{v}_1(M) + \frac{1}{2} (R^2 - \rho_1^2) \text{grad}_M \int_0^{\rho_1} \frac{d\rho_1}{\rho_1} \text{div}_M \mathbf{v}_1 \right] dS_M + \\ + \frac{V_a^2}{16\pi^2 k \eta} \int_S G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\mathbf{w}_1(M) + \frac{1}{2} (R^2 - \rho_1^2) \text{grad}_M \int_0^{\rho_1} \frac{d\rho_1}{\rho_1} \text{div}_M \mathbf{w}_1 \right] dS_M,$$

che esprime esplicitamente il campo magnetico indotto per mezzo dei dati in superficie.

Se l'involucro sferico in cui è contenuta la massa liquida è dotato di un moto traslatorio uniforme con velocità $\mathbf{V}_0$ costante e di un moto rotatorio assiale pure uniforme, con velocità angolare costante $\boldsymbol{\Omega}_0$, allora risulta

$$\mathbf{v}_1(P) = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega}_0 \wedge (P - O) \quad , \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0,$$

e le formule precedenti si semplificano notevolmente.

SUMMARY. — In this second paper the author again considers the slow steady motion of a viscid and electrical conducting fluid, in a moving spherical rigid envelope, plunged in a uniform magnetic field.

First he shows that the velocity of the fluid particles verifies the same differential equation of the fourth order which is satisfied by the vortex vector and the conductive current. After he attends to determine the velocity of the fluid particles and the induced magnetic field in a point within the sphere when their values are however assigned on the surface.