
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

MAURO PICONE

Sull'approssimazione tayloriana di una funzione di variabile reale mediante polinomi trigonometrici o iperbolici

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 38 (1965), n.4, p. 441–447.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_4_441_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 aprile 1965

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Sull'approssimazione tayloriana di una funzione di variabile reale mediante polinomi trigonometrici o iperbolici.* Nota (*) del Socio MAURO PICONE.

Designando n un numero intero, positivo o nullo, siano dati due insiemi F e G , rispettivamente, di funzioni $f(x)$ e $g(x)$ della variabile reale x , entrambe di classe n in un intervallo (x', x'') dell'asse reale x , cioè, continue, in tale intervallo, con le loro derivate fino a quelle incluse d'ordine n . Dirò che una funzione $g(x)$ di G è *un'approssimazione tayloriana, di rango n , di una funzione $f(x)$ di F , con punto di riferimento nel punto x_0 di (x', x'')* , se sussistono le $n + 1$ eguaglianze:

$$\left[\frac{d^k g}{dx^k} \right]_{x=x_0} = \left[\frac{d^k f}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Tale approssimazione è studiata fin dagli elementi se G è l'insieme dei polinomi interi. Nel caso che $f(x)$ sia — in particolare — di classe $n + 1$ nell'intervallo (x', x'') e $g_n(x)$ sia il polinomio intero di grado n , di approssimazione tayloriana di rango n , della $f(x)$ col punto di riferimento x_0 , per l'errore d'approssimazione $f(x) - g_n(x)$, si ha, com'è ben noto, la formola:

$$(I) \quad f(x) - g_n(x) \equiv \int_{x_0}^x \frac{(x-\xi)^n}{n!} \frac{d^{n+1}f}{d\xi^{n+1}} d\xi.$$

(*) Presentata nella seduta del 13 marzo 1965.

Non mi risulta che sia stata mai considerata - prima della mia Nota dal titolo: *Sulla matrice risolvante di un sistema normale di equazioni differenziali lineari, ordinarie, con la variabile indipendente reale* ⁽¹⁾ - l'approssimazione tayloriana di una funzione $f(x)$ mediante polinomi trigonometrici, cioè l'approssimazione tayloriana di una funzione $f(x)$ di F , con una funzione $g(x)$ dell'insieme G di funzioni descritto dal polinomio trigonometrico d'ordine n :

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

al variare, comunque, dell'ordine n e dei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$.

Al n. 4 della citata mia Nota, è dimostrato, in proposito, il teorema seguente.

I. *Supposta la funzione $f(x)$ di classe $2n+1$, comunque si fissi il punto x_0 nell'intervallo (x', x'') , esiste sempre uno ed un solo polinomio trigonometrico d'ordine n , d'approssimazione tayloriana della $f(x)$, di rango $2n$, col punto di riferimento nel detto punto x_0 , e, posto*

$$T_n[f(x)] \equiv \frac{d}{dx} \prod_{k=1}^n \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) f(x),$$

per l'errore d'approssimazione $f(x) - g_n(x)$, si ha l'identità:

$$(2) \quad f(x) - g_n(x) \equiv \int_{x_0}^x \rho_n(x, \xi) T_n[f(\xi)] d\xi,$$

ove, per ogni punto ξ dell'intervallo (x', x'') , $\rho_n(x, \xi)$ designa la soluzione dell'equazione differenziale d'ordine $2n+1$:

$$(3) \quad T_n(u) \equiv \frac{d}{dx} \prod_{k=1}^n \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right) u = 0,$$

verificante le condizioni:

$$(4) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \rho_n(\xi, \xi) &= 0, & \text{per } i = 0, 1, \dots, 2n-1, \\ \frac{\partial^i}{\partial x^i} \rho_n(\xi, \xi) &= 1, & \text{per } i = 2n. \end{aligned} \right\}$$

La Nota presente ha lo scopo di far conoscere l'ulteriore teorema seguente.

II. *Per il nucleo $\rho_n(x, \xi)$ dell'integrale al secondo membro della (2), vale l'identità:*

$$(5) \quad \rho_n(x, \xi) \equiv \frac{2^{2n}}{(2n)!} \left(\sin \frac{x-\xi}{2} \right)^{2n},$$

e pertanto, per l'errore $f(x) - g_n(x)$ col quale, il polinomio trigonometrico d'ordine n , approssima taylorianamente, con rango $2n$ e con punto di riferimento x_0 ,

(1) Questi « Rendiconti », vol. XXXVIII della Serie VIII, fasc. I (Gennaio 1965).

la funzione $f(x)$, di classe $2n+1$, si ha l'identità:

$$(6) \quad f(x) - g_n(x) \equiv \frac{2^{2n}}{(2n)!} \int_{x_0}^x \left(\sin \frac{x-\xi}{2} \right)^{2n} T_n[f(\xi)] d\xi.$$

D i m o s t r a z i o n e. — Essendo l'equazione (3) a coefficienti costanti, la sua soluzione verificante le condizioni (4) è data dalla soluzione $\rho_n(x)$, della stessa, verificante le condizioni:

$$(7) \quad \left[\frac{d^i}{dx^i} \rho_n(x) \right]_{x=0} \begin{cases} = 0, & \text{per } i = 0, 1, \dots, 2n-1, \\ = 1, & \text{per } i = 2n, \end{cases}$$

sostituendovi $x - \xi$ in luogo di x . Le indicate condizioni verranno verificate dalla $\rho_n(x)$, se questa è infinitesima con x , e, rispetto a questa, d'ordine $2n$. Deve, pertanto, aversi

$$(8) \quad \rho_n(x) \equiv q_n \left(\sin \frac{x}{2} \right)^{2n},$$

con q_n funzione da determinarsi, non nulla per $x = 0$. Assunta q_n costante non nulla, si ottiene, con la (8), una soluzione della (3), caratteristica dei polinomi trigonometrici d'ordine n , poichè, essendo

$$\left(\sin \frac{x}{2} \right)^{2n} = \frac{1}{2^n} (1 - \cos x)^n,$$

ne segue che la funzione $\rho_n(x)$, data dalla (8), con q_n costante, è un polinomio trigonometrico d'ordine n , privo dei termini contenenti i seni dei multipli di x . Assunta q_n costante, si dimostra poi subito, per induzione, che, per $i \leq n-1$, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d^{2i} \rho_n}{dx^{2i}} &= q_n \frac{2n(2n-1) \cdots (2n-2i+1)}{2^{2i}} \left(\sin \frac{x}{2} \right)^{2n-2i} + \sigma_n^{(2i)}(x), \\ \frac{d^{2i+1} \rho_n}{dx^{2i+1}} &= q_n \frac{2n(2n-1) \cdots (2n-2i)}{2^{2i+1}} \left(\sin \frac{x}{2} \right)^{2n-2i-1} \cos \frac{x}{2} + \sigma_n^{(2i+1)}(x), \end{aligned}$$

essendo $\sigma_n^{(2i)}(x)$ e $\sigma_n^{(2i+1)}(x)$, infinitesimi con x , d'ordine, rispetto a x , il primo non inferiore a $2n-2i+2$ ed il secondo non inferiore a $2n-2i+1$. Risulta, pertanto,

$$\frac{d^{2n-1} \rho_n}{dx^{2n-1}} = q_n \frac{2n(2n-1) \cdots 2}{2^{2n-1}} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sigma_n^{(2n-1)}(x),$$

essendo $\sigma_n^{(2n-1)}(x)$ infinitesimo con x , d'ordine, rispetto a x , non inferiore a tre. Ne segue:

$$\frac{d^{2n-1} \rho_n}{dx^{2n-1}} = q_n \frac{(2n)!}{2^{2n}} \sin x + \sigma_n^{(2n-1)}(x),$$

$$\frac{d^{2n} \rho_n}{dx^{2n}} = q_n \frac{(2n)!}{2^{2n}} \cos x + \frac{d}{dx} \sigma_n^{(2n-1)}(x),$$

e quindi che sono verificate le (7) se e soltanto se si assume

$$q_n = \frac{2^{2n}}{(2n)!},$$

donde la tesi.

In quanto precede $f(x)$ può rappresentare anche una matrice ed essere, in particolare, una funzione complessa e dal Teorema II si deduce il seguente.

III. *Designato con $M_n(x_0, x)$ il massimo del modulo di $T_n[f(x)]$ nell'intervallo coi punti terminali x_0 e x , per l'errore $f(x) - g_n(x)$, col quale il polinomio trigonometrico $g_n(x)$ d'ordine n , approssima taylorianamente la funzione $f(x)$, con rango $2n$ e con riferimento nel punto x_0 , sussiste la limitazione*

$$(9) \quad |f(x) - g_n(x)| \leq \frac{|x - x_0|^{2n+1}}{(2n+1)!} M_n(x_0, x).$$

Dimostrazione. - Si ha:

$$\left| \sin \frac{x - \xi}{2} \right| \leq \frac{|x - \xi|}{2}.$$

Ne segue che:

IV. *Se l'ampiezza dell'intervallo (x', x'') non è inferiore a 2π e non vi esistono punti x per i quali riesce $f(x + 2\pi) = f(x)$, in ogni intervallo, contenuto nell'intervallo (x', x'') , di ampiezza non inferiore a 2π , devono esistere punti x per i quali riesce:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty}'' \frac{(x - x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!} M_n(x_0, x) > 0.$$

Dimostrazione. - Se, nell'intervallo (ξ', ξ'') , di ampiezza non inferiore a 2π , contenuto nell'intervallo (x', x'') , risultasse, comunque vi si assuma il punto x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x - x_0)^{2n+1}}{(2n+1)!} M_n(x_0, x) = 0,$$

seguirebbe, dalla (9), per x e $x + 2\pi$ punti del detto intervallo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x + 2\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x + 2\pi),$$

e quindi $f(x + 2\pi) = f(x)$, contro l'ipotesi.

È notevole la circostanza che, in entrambe le formole (1) e (6), che forniscono l'errore dell'approssimazione tayloriana di una funzione $f(x)$ con polinomi interi o con polinomi trigonometrici, il nucleo dell'integrale a secondo membro sia positivo. Ciò ha di conseguenza il teorema, analogo a quello dell'approssimazione tayloriana con polinomi interi:

V. *Se $f(x)$ è una funzione reale, di classe $2n+1$ nell'intervallo (x', x'') e $g_n(x)$ è il polinomio trigonometrico, d'ordine n , che approssima taylorianamente*

la $f(x)$, con rango $2n$ e con riferimento nel punto x_0 , esiste un numero reale θ , positivo e minore di uno, per il quale si ha:

$$(10) \quad f(x) - g_n(x) = \frac{2^{2n}}{(2n)!} \int_{x_0}^x \left(\sin \frac{x-\xi}{2} \right)^{2n} d\xi \cdot T_n[f(\eta)],$$

$$\eta = x_0 + \theta(x - x_0).$$

Rinunziando ad enunciare i notevoli teoremi che possono dedursi dalla (10), mi limiterò a osservare quanto segue.

Comunque si assuma la funzione $\varphi(x)$, di classe $2n+1$ nell'intervallo (x', x'') , la funzione

$$\psi(x) = \varphi(x) - \frac{2^{2n}}{(2n)!} \int_{x_0}^x \left(\sin \frac{x-\xi}{2} \right)^{2n} T_n[\varphi(\xi)] d\xi,$$

è un polinomio trigonometrico d'ordine n per il quale riesce:

$$\left[\frac{d^i \psi}{dx^i} \right]_{x=x_0} = \left[\frac{d^i \varphi}{dx^i} \right]_{x=x_0} \quad (i = 0, 1, \dots, 2n).$$

Si ha, invero,

$$\left[\frac{d^i}{dx^i} \int_{x_0}^x \left(\sin \frac{x-\xi}{2} \right)^{2n} T_n[\varphi(\xi)] d\xi \right]_{x=x_0} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 2n)$$

e

$$T_n[\psi(x)] = T_n[\varphi(x)] - T_n \left[\frac{2^{2n}}{(2n)!} \int_{x_0}^x \left(\sin \frac{x-\xi}{2} \right)^{2n} T_n[\varphi(\xi)] d\xi \right] = 0,$$

donde il teorema:

VI. *Data la funzione $f(x)$, di classe $2n+1$ nell'intervallo (x', x'') , il polinomio trigonometrico $g_n(x)$ d'ordine n , d'approssimazione tayloriana della $f(x)$, con rango $2n$ e punto di riferimento x_0 è dato dalla formola*

$$g_n(x) = \varphi(x) - \frac{2^{2n}}{(2n)!} \int_{x_0}^x \left(\sin \frac{x-\xi}{2} \right)^{2n} T_n[\varphi(\xi)] d\xi,$$

ove $\varphi(x)$ è un'arbitraria funzione, di classe $2n+1$ nell'intervallo (x', x'') , per la quale si ha:

$$\left[\frac{d^k \varphi}{dx^k} \right]_{x=x_0} = \left[\frac{d^k f}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (k = 0, 1, \dots, 2n).$$

Indicando con $f^{(k)}(x)$ la derivata $d^k f/dx^k$, posto

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

si ha, dunque,

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \left\{ \frac{(x-x_0)^k}{k!} - \frac{2^{2n}}{(2n)!} \int_{x_0}^x \left(\sin \frac{x-\xi}{2} \right)^{2n} T_n \left[\frac{(\xi-x_0)^k}{k!} \right] d\xi \right\}.$$

Il polinomio trigonometrico, d'ordine n ,

$$g_{nk}(x, x_0) \equiv \frac{(x-x_0)^k}{k!} - \frac{2^{2n}}{(2n)!} \int_{x_0}^x \left(\sin \frac{x-\xi}{2} \right)^{2n} T_n \left[\frac{(\xi-x_0)^k}{k!} \right] d\xi,$$

$$(k = 0, 1, \dots, 2n)$$

verifica le condizioni:

$$(12) \quad \left[\frac{\partial^i g_{nk}(x, x_0)}{\partial x^i} \right]_{x=x_0} = \begin{cases} 0, & \text{per } i \neq k, \\ 1, & \text{per } i = k, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots, 2n),$$

e pertanto è la soluzione dell'equazione differenziale $T_n(u) = 0$, determinata dalle condizioni (12) prescritte nel punto x_0 . In forza della costanza dei coefficienti di tale equazione, l'indicata sua soluzione si ottiene da quella, che indicherò col simbolo $g_{nk}(x)$, verificante le condizioni:

$$(13) \quad \left[\frac{d^i g_{nk}(x)}{dx^i} \right]_{x=0} = \begin{cases} 0, & \text{per } i \neq k, \\ 1, & \text{per } i = k, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots, 2n),$$

sostituendovi $x - x_0$ in luogo di x . Si ha dunque il teorema:

VII. Designato con $g_{nk}(x)$ ($k = 0, 1, \dots, 2n$) il polinomio trigonometrico d'ordine n , verificante le condizioni (13), il polinomio trigonometrico d'ordine n , approssimante taylorianamente la funzione $f(x)$, di classe $2n+1$, col rango $2n$ e col punto di riferimento x_0 , è dato dalla formola

$$(14) \quad g_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(x_0) g_{nk}(x - x_0).$$

Dei polinomi trigonometrici $g_{nk}(x)$, individuati dalla coppia di indici n e k , può esser fatta una preventiva tabulazione, la quale, ove fosse estesa a valori di n abbastanza alti, consentirebbe l'immediato impiego, nelle applicazioni, della considerata approssimazione tayloriana. Si osservi che $g_{n0}(x) \equiv 1$, talché la (14) può anche scriversi:

$$(15) \quad g_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{2n} f^{(k)}(x_0) g_{nk}(x - x_0).$$

Ovviamente, se la funzione $f(x)$ fosse periodica e di periodo ω , converrebbe sostituire al considerato insieme G , quello $G^{(\omega)}$ costituito dai polinomi trigonometrici:

$$g_n^{(\omega)}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n \left[a_k \cos \left(k \frac{2\pi}{\omega} x \right) + b_k \sin \left(k \frac{2\pi}{\omega} x \right) \right].$$

L'errore d'approssimazione sarebbe allora dato dalla formola

$$(16) \quad f(x) - g_n^{(\omega)}(x) \equiv \int_{x_0}^x \rho_n^{(\omega)}(x, \xi) T_n^{(\omega)}[f(\xi)] d\xi,$$

con

$$\rho_n^{(\omega)}(x, \xi) \equiv \frac{1}{(2n)!} \left[\frac{\omega}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\omega} (x - \xi) \right]^{2n},$$

$$T_n^{(\omega)}[f(x)] \equiv \frac{d}{dx} \prod_{k=1}^n \left(\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{2k\pi}{\omega} \right)^2 \right) f(x).$$

Sussiste la maggiorazione, data dalla (9), dell'errore, rappresentando $M_n(x_0, x)$ il massimo modulo di $T_n^{(\omega)}[f(x)]$ nell'intervallo coi punti terminali x_0 e x , ed è interessante osservare che, al tendere di ω all'infinito, la (16) tende alla (1) ove vi si sostituisca n con $2n$.

Le cose dette, fatta eccezione per i teoremi III e IV, possono ripetersi anche per l'approssimazione tayloriana di una funzione di variabile reale x , mediante polinomi iperbolici, la cui totalità G è descritta dalla funzione

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cosh kx + b_k \sinh kx),$$

al variare, comunque, dell'intero n (ordine del polinomio) e dei coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Posto, per una funzione $f(x)$, di classe $2n+1$,

$$H_n[f(x)] \equiv \frac{d}{dx} \prod_{k=1}^n \left(\frac{d^2}{dx^2} - k^2 \right) f(x),$$

sussiste il teorema:

VIII. *Per l'errore $f(x) - g_n(x)$, col quale il polinomio iperbolico d'ordine n , approssima taylorianamente, con rango $2n$ e punto di riferimento x_0 , la funzione $f(x)$ di classe $2n+1$, si ha l'identità*

$$f(x) - g_n(x) \equiv \frac{2^{2n}}{(2n)!} \int_{x_0}^x \left(\sinh \frac{x-\xi}{2} \right)^{2n} H_n[f(\xi)] k \xi.$$

Posto, per ogni intero n ,

$$(17) \quad g_{nk}(x) \equiv \frac{x^k}{k!} - \frac{2^{2n}}{(2n)!} \int_{x_0}^x \left(\sinh \frac{x-\xi}{2} \right)^{2n} H_n \left(\frac{\xi^k}{k!} \right) d\xi,$$

$$(k = 0, 1, \dots, 2n)$$

si ha, in tale funzione $g_{nk}(x)$, un polinomio iperbolico d'ordine n , verificante le condizioni:

$$\left[\frac{d^i g_{nk}}{dx^i} \right]_{x=0} = \begin{cases} 0, & \text{per } i \neq k, \\ 1, & \text{per } i = k, \end{cases}$$

e il teorema:

IX. *Il polinomio iperbolico $g_n(x)$, d'ordine n , approssimante taylorianamente la funzione $f(x)$ di classe $2n+1$, col rango $2n$ e col punto di riferimento x_0 , è dato dalla (15), ove $g_{nk}(x)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 2n$) è il polinomio iperbolico definito dalla (17).*