Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ennio De Giorgi, Guido Stampacchia

Sulle singolarità eliminabili delle ipersuperficie minimali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.3, p. 352–357.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_3_352_0>

Analisi matematica. — *Sulle singolarità eliminabili delle ipersuperficie minimali.* Nota di ENNIO DE GIORGI e GUIDO STAMPACCHIA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Nel 1950 L. Bers [1] stabilì che una superficie minimale che può essere rappresentata nella forma $u = u(x, y)$ non può avere singolarità isolate. Diverse dimostrazioni di questo risultato ed estensioni a soluzioni di equazioni più generali che l'equazione dell'area minima sono state date da R. Finn, J. Nitsche, R. Osserman (cfr. [2] per la bibliografia relativa).

Noi dimostreremo in questa Nota che *una ipersuperficie minimale che può essere rappresentata nella forma* $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *non può avere singolarità in un compatto avente capacità di ordine 1 nulla o, ciò che è lo stesso, in un compatto avente misura di Hausdorff* $(n-1)$*-dimensionale nulla* (1).

Questa proprietà delle superficie minimali non ha riscontro nelle soluzioni di equazioni ellittiche lineari o non lineari in generale, in quanto alcuna limitazione a priori è qui richiesta sulle soluzioni.

Il problema delle singolarità eliminabili per equazioni ellittiche non lineari è stato recentemente considerato da J. Serrin [7].

Sia A un aperto di R^n; una funzione $u(x)$ analitica reale in A è soluzione dell'equazione delle superficie minime in A se, posto:

$$W[u] = (1 + \Sigma u_{x_i}^2)^{1/2} \quad , \quad W_i[u] = u_{x_i}/W[u]$$

si ha (2):

$$\int_A W_i[u]\, \eta_{x_i}\, dx = 0 \tag{1}$$

per ogni funzione η indefinitamente derivabile e con supporto compatto in A (e quindi per ogni η lipschitziana a supporto compatto in A).

Osserviamo, a questo proposito che $u(x)$ è analitica in A se essa è ivi localmente lipschitziana in A (cfr. teor. 3.2).

Consideriamo ora un aperto Ω di R^n ed un compatto N di Ω che abbia capacità di ordine 1 nulla (§ 1).

Il teorema in questione afferma che una soluzione di (1) in $\Omega - N$ è prolungabile in una soluzione di (1) in Ω. La tecnica della dimostrazione consiste nel provare che le proprietà di massimo e di minimo e di confronto delle soluzioni di (1) in Ω sussistono inalterate per le soluzioni di (1) in $\Omega - N$.

(*) Nella seduta del 13 marzo 1965.

(1) Il fatto che un compatto ha capacità di ordine 1 nulla se e solo se la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale è nulla è noto [7].

(2) Qui e nel seguito i simboli di sommatoria saranno sottintesi nel caso di indici ripetuti.

§ 1. COMPATTI DI CAPACITÀ DI ORDINE 1 NULLA. – Sia K un compatto di R^n; diremo capacità di ordine 1 di K l'estremo inferiore di

$$\int |v_x|\, dx \qquad \left[|v| = (\sum_i |v_{x_i}|^2)^{1/2}\right]$$

nella classe delle funzioni lipschitziane (indefinitivamente derivabili) con supporto compatto e tali che $v \geq 1$ su K (3).

LEMMA 1.1 (cfr. [7] p. 285). – *Se* N *è un compatto avente capacità di ordine 1 nulla, esiste una successione* $\{v^{(s)}\}$ *di funzioni lipschitziane con supporto compatto soddisfacenti le condizioni seguenti:*

(i) $0 \leq v^{(s)} \leq 1$ ovunque

(ii) $v^{(s)} = 1$ in un aperto contenente N

(iii) $\lim_{s\to\infty} \| v_x^{(s)} \|_{L^1} = 0$

(iv) $\lim_{s\to\infty} v^{(s)}(x) = 0$ quasi ovunque in R^n.

Dim. – Sia $w^{(s)}$ una successione di funzioni lipschitziane con supporto compatto, tale che $w^{(s)} \geq 1$ su N e $\| w^{(s)} \|_{L^1} \to 0$.

La funzione $2\, w^{(s)}$ è quindi > 1 in un aperto contenete N e la funzione $v^{(s)}$ ottenuta troncando $2\, w^{(s)}$ inferiormente a zero e superiormente ad 1 soddisfa le condizioni (i), (ii), (iii). Poiché $v^{(s)}$ è con supporto compatto, si ha (cfr. ad esempio [6])

$$\| v^{(s)} \|_{L^{n/(n-1)}} \leq C \| v_x^{(s)} \|_{L^1}$$

con C costante dipendente solo da n. Si deduce che $v^{(s)}$ tende a zero in misura. Pertanto per una sottosuccessione di $\{v^{(s)}\}$, che indicheremo ancora con $\{v^{(s)}\}$ si ha la condizione (iv).

COROLLARIO (cfr. [7]). – *Un compatto* N *avente capacità di ordine 1 nulla ha misura n–dimensionale secondo Lebesgue nulla.*

Infatti N è contenuto nell'insieme ove la (iv) non è verificata.

LEMMA 1.2. – *Se* N_1 *e* N_2 *sono due compatti aventi capacità di ordine 1 nulla,* $N_1 \cup N_2$ *ha capacità di ordine 1 nulla.*

Dim. – Siano $\{v_i^{(s)}\}$ $i = 1, 2$, due successioni di funzioni lipschitziane con supporto compatto tali che

$$v_i^{(s)} \geq 1 \quad \text{su } N_i \qquad (s = 1, 2, \cdots)$$
$$\| (v_i^{(s)})_x \|_{L^1} \to 0.$$

La successione $v^{(s)} = \max\{v_1^{(s)}, v_2^{(s)}\}$ di funzioni lipschitziane con supporto compatto, è tale che

$$v^{(s)} \geq 1 \quad \text{su} \quad N_1 \cap N_2$$

(3) Qui la nozione di capacità è presa, come in [7], in un senso diverso da quello che si suole assumere in teoria del potenziale.

e

$$\| v_x^{(s)} \| \leq \| (v_1^{(s)})_x \|_{L^1} + \| (v_2^{(s)})_x \|_{L^1} \to 0 .$$

LEMMA 1.3. – *Se* N *è un compatto di capacità di ordine* 1 *nulla contenuto in un aperto connesso* Ω, *allora* $\Omega - N$ *è connesso.*

Dim. – Se ciò non accadesse, potremmo trovare due aperti disgiunti A_1 e A_2 tali che $A_1 \cup A_2 = \Omega - N$ e $\partial A_1 \cap \partial A_2 \subset N$ (4).

Considerando allora una successione $\{ v^{(s)} \}$ come nel lemma 1,1, costruiamo una nuova successione $\{ w^{(s)} \}$ ottenuta, ponendo, ad esempio:

$$w^{(s)} = v^{(s)} \quad \text{in } A_2$$

$$w^{(s)} = 1 \quad \text{in } A_1 \cup N$$

Poiché $\| w^{(s)} \|_{L^1(\Omega)} \leq \| v^{(s)} \|_{L^1}$, seguirebbero che A_1 o A_2 avrebbe misura nulla e ciò è assurdo essendo essi aperti.

§ 2. PROPRIETÀ DI MASSIMO. – Dimostriamo i seguenti lemmi che generalizzano alcuni risultati di [8, § 4] e [5].

LEMMA 2.1. – *Sia* $u(x)$ *una soluzione di* (1) *in* $\Omega - N$ *ove* N *è un compatto contenuto in* Ω, *avente capacità di ordine* 1 *nulla. Allora, se* Ω' *è un insieme aperto limitato tale che* $N \subset \Omega'$ *e* $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, *si ha:*

$$\sup_{\Omega' - N} | u | \leq \max_{\partial \Omega'} | u | .$$

Dim. – Poniamo $\Phi = \max_{\partial\Omega'} | u |$ e sia $\vartheta(t)$ una funzione indefinitamente derivabile in $(-\infty, +\infty)$ tale che

$$\vartheta(t) = 0 \quad \text{per} \quad |t| \leq \Phi$$

$$\vartheta(t) \neq 0 \quad \text{per} \quad |t| > \Phi,$$

$$|\vartheta(t)| \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \vartheta'(t) \leq 1 .$$

Poniamo allora in (1)

$$\eta = \begin{cases} (1 - v^{(s)})\, \vartheta(u) & x \in \Omega' \\ 0 & x \in \Omega - \Omega' \end{cases}$$

ove $v^{(s)}$ è la successione del lemma 1.1.

Ciò è lecito perché η è lipschitziana in Ω e con supporto in $\Omega - N$. Si ha allora

$$\int_{\Omega'} [1 - v^{(s)}]\, \vartheta'(u)\, W_i [u]\, u_{x_i} \, dx - \int_{\Omega'} v_{x_i}^{(s)}\, W_i [u]\, \vartheta(u)\, dx = 0$$

(4) Con $\partial\Omega$ indicheremo la frontiera di Ω e con $\overline{\Omega}$ la chiusura di Ω.

da cui

$$\int_{\Omega'} [1 - v^{(s)}]\, \vartheta'(u)\, W_i\, [u]\, u_{x_i}\, dx \leq \int_{R^n} |\, v_x^{(s)} \,|\, dx.$$

Poiché l'integrando a primo membro è non negativo si ha

$$0 \leq \int_{\Omega'} [1 - v^{(s)}]\, \vartheta'(u)\, W_i\, [u]\, u_{x_i}\, dx \leq \int_{R^n} |\, v_x^{(s)} \,|\, dx.$$

Passando al limite per $s \to +\infty$, per il lemma di Fatou e per le (iii) e (iv) del lemma 1.1. si ha

$$\int_{\Omega'} \vartheta'(u)\, W_i\, [u]\, u_{x_i}\, dx = 0.$$

Di qui segue, tenendo conto del lemma 1.3, applicato alle componenti connessi di Ω', che $|\,u\,| \leq \Phi$ quasi ovunque in Ω'.

LEMMA 2.2. – *Siano $u(x)$ e $z(x)$ due soluzioni di* (1) *in* $\Omega - N$, *ove* N *è un compatto contenuto in* Ω *avente capacità di ordine 1 nulla. Sia* Ω' *un aperto limitato tale che* $N \subset \Omega'$ *e* $\bar{\Omega}' \subset \Omega$; *allora se* $u(x) \leq z(x)$ *su* $\partial\Omega'$, *segue*

$$u(x) \leq z(x)$$

quasi ovunque in Ω'.

Dim. – Sia $v^{(s)}$ la sucessione del lemma 1.1 e poniamo

$$\eta = \begin{cases} (1 - v^{(s)})\, [\min(u, z) - u] & \text{per } x \in \Omega' \\ 0 & \text{per } x \in \Omega - \Omega'. \end{cases}$$

La funzione η essendo lipschitziana con supporto in $\Omega - N$ può essere utilizzata nella equazione (1) e in quella analoga per la soluzione $z(x)$.

Si ha allora, detto B l'eventuale sotto insieme di Ω' in cui è: $u(x) \geq z(x)$:

$$\int_B (1 - v^{(s)})\, W_i\, [u]\, (z_{x_i} - u_{x_i})\, dx + \int_B W_i\, [u]\, (z - u)\, v_{x_i}^{(s)}\, dx = 0$$

$$\int_B (1 - v^{(s)})\, W_i\, [z]\, (z_{x_i} - u_{x_i})\, dx + \int_B W_i\, [z]\, (z - u)\, v_{x_i}^{(s)}\, dx = 0.$$

Sottraendo membro a membro e tenendo conto del lemma 2.1, si ha:

$$\int_B (1 - v^{(s)})\, (W_i\, [z] - W_i\, [u])\, (z_{x_i} - u_{x_i})\, dx \leq (\max_{\partial\Omega'} |\, z \,| + \max_{\partial\Omega'} |\, u \,|)\, \|\, v_x^{(s)} \,\|_{L^1}\, .$$

La funzione $(W_i\, [z] - W_i\, [u])\, (z_{x_i} - u_{x_i})$ è non negativa e si annulla solo per $z_{x_i} = u_{x_i}$ $(i = 1, \cdots, n)$.

Ragionando come nella dimostrazione del lemma precedente si trova che

$$\int_B (W_i[z] - W_i[u])(z_{x_i} - u_{x_i})\, dx = 0$$

e di qui segue che la funzione $\min(u, z) - u$ ha derivate q. ov. nulle in Ω' e quindi per il lemma 1.3 si ha q. ov. in Ω': $u(x) \leq z(x)$. Il lemma è così dimostrato.

COROLLARIO. – *Nelle stesse ipotesi del lemma 2.2 si ha:*

$$\sup_{\Omega'-N} |u - z| \leq \max_{\partial\Omega'} |u - z| \tag{3}$$

Dim. – Infatti posto $\Phi = \max\limits_{\partial\Omega'} |u - z|$, le funzioni $z + \Phi$ e $z - \Phi$ sono soluzioni di (1) in $\Omega - N$. Pertanto dal lemma precedente segue che, essendo

$$z - \Phi \leq u \leq z + \Phi \quad \text{su} \quad \partial\Omega'$$

deve essere, quasi ovunque in Ω'

$$z - \Phi \leq u \leq z + \Phi$$

cioè la (3).

§ 3. SINGOLARITÀ ELIMINABILI. – Ci proponiamo di dimostrare il risultato enunciato nell'introduzione e precisamente di dimostrare il seguente

TEOREMA 3.1. – *Sia $u(x)$ una soluzione di* (1) *in $\Omega - N$ ove N è un compatto contenuto in Ω, avente capacità di ordine 1 nulla. Allora $u(x)$ è analitica in Ω.*

Alla dimostrazione di questo teorema premettiamo il seguente

LEMMA 3.1. – *Nelle stesse ipotesi del teorema precedentemente enunciato, la funzione $u(x)$ è prolungabile in una funzione localmente lipschitziana in Ω.*

Dim. – Sia Ω' un aperto limitato tale che: $N \subset \Omega'$ e $\overline{\Omega}' \subset \Omega$; fissiamo d in modo che l'insieme E dei punti

$$E \equiv \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega') \leq \delta\}$$

non abbia punti in comune con $N \cup \partial\Omega$.

Poniamo poi

$$M = \max_E |u_x|.$$

Sia ora τ un vettore arbitrario tale che $|\tau| < d$. La funzione $g(x) = u(x + \tau)$ è una soluzione di (1) in $\Omega' - N_\tau$ dove con N_τ abbiamo indicato l'insieme N traslato di τ.

L'insieme $N \cup N_\tau$ ha capacità di ordine 1 nulla (lemma 1.2). Per il corollario del lemma 2.2, si ha

$$\sup_{x, x+\tau \in \Omega' - N} |u(x + \tau) - u(x)| \leq \max_{y \in \partial\Omega'} |u(y + \tau) - u(y)| \leq M|\tau|. \tag{4}$$

La funzione $u(x)$ è dunque lipschitziana in $\Omega' - N$ e quindi prolungabile in una funzione lipschitziana in Ω' con lo stesso coefficiente di Lipschitz.

Dimostrazione del teorema 3.1. – Il teorema è conseguenza del lemma 3.1 e del seguente teorema

TEOREMA 3.2. – *Una soluzione di* (1) *localmente lipschitziana in un aperto* Ω *è analitica nell'interno di* Ω.

Sia Ω' un aperto limitato tale che $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ e diciamo K il massimo delle derivate prime della soluzione u in Ω'.

Poniamo

$$g(t) = \sqrt{1 + t^2} + c\alpha(t)\, t^2$$

dove $\alpha(t)$ è una funzione indefinitamente derivabile per $0 \leq t < +\infty$ tale che $\alpha(t) \equiv 0$ per $t \leq 2K$, $\alpha(t) \equiv 1$ per $t \geq 3K$. È facile verificare che si può scegliere c positivo in modo che posto $p \equiv (p_1, \cdots, p_n)$ si ha

$$f(p) = g(|p|) = \sqrt{1 + p^2} \qquad \text{per } |p| \leq K$$

e

$$m|\xi|^2 \leq f_{p_i p_j}(p)\, \xi_i \xi_j \leq M|\xi|^2 \qquad 0 < m < M < +\infty. \tag{5}$$

La soluzione u di (1) è pertanto anche soluzione dell'equazione

$$\int_{\Omega'} f_{p_i}(u_x)\, \eta_{x_i}\, dx = 0$$

per ogni η indefinitivamente derivabile con supporto in Ω' ove f soddisfa la (5). Di qui segue l'analiticità di u [3].

BIBLIOGRAFIA.

[1] L. BERS, *Isolated singularities of minimal surfaces*, « Ann. of Math. », *53*, 364–386 (1951).

[2] R. COURANT and D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, II, p. 400 (1962).

[3] E. DE GIORGI, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, « Mem. Accad. Ser. Torino », *143*, 25–43 (1957).

[4] W. H. FLEMING, *Functions whose partial derivatives are measures*, « Illinois Journal of Mathematics », *4*, 452–478 (1960) (theor. 4.3 di p. 457).

[5] M. MIRANDA, *Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in n variabili* (in corso di stampa).

[6] L. NIRENBERG, *On elliptic partial differential equations*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa », *13*, 115–162 (1959) (lecture II).

[7] J. SERRIN, *Local Behavior of solutions of quasi-linear equations*, « Acta Mathematica », 111, 247–302 (1964).

8] G. STAMPACCHIA, *On some regular multiple integral problems in the Calculus of variations*, « Comm. pure and applied Math. », XVI, 383–421 (1963).

Aggiunta durante le correzioni delle bozze. – Il prof. Serrin ci ha gentilmente comunicato che il teorema 3.1 nel caso di due variabili è stato dimostrato da J. Nitsche in un lavoro di prossima pubblicazione nel « Bulletin of the American Mathematical Society ».