Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

András Kósa

Sulle funzioni di invarianza più generali del calcolo delle variazioni unidimensionali di ordine qualsiasi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.3, p. 345–351.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_3_345_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Analisi matematica. — *Sulle funzioni di invarianza più generali del calcolo delle variazioni unidimensionali di ordine qualsiasi.* Nota di ANDRÁS KÓSA, presentata [*] dal Socio M. PICONE.

Il concetto di funzione di invarianza è importante per diversi problemi del calcolo delle variazioni, fra l'altro per dare condizioni sufficienti per l'estremo assoluto. I lavori [1]–[13] ed anche altri in preparazione si basano su questo concetto. Il problema principale è, in ogni caso, quello di determinare tutte le funzioni di invarianza rispetto al problema considerato. Lo scopo della Nota presente consiste nel costruire le funzioni di invarianza più generali (appartenenti alla classe $n+1$) per il problema di minimo dell'integrale:

$$J[y]=\int_a^b f(x, y, y', \cdots, y^{(n)})\, dx .$$

Alcuni risultati particolari, in connessione a questo problema, si trovano nelle Note [12] e [13].

1. Faremo uso delle seguenti notazioni.

Sia n un intero positivo arbitrariamente fissato e prendiamo un intervallo $[a, b]$ dell'asse reale. Si definisce, per ogni $k=0, 1, 2, \cdots$, il dominio T_k nel modo seguente:

$$T_k=\{x \in [a, b] \quad , \quad -\infty < y_i < +\infty \quad , \quad i=0, 1, \cdots, k\}.$$

Indichiamo con C_k $(k=1, 2, \cdots)$ l'insieme delle funzioni definite in $[a, b]$ ed ivi continue, con le loro derivate fino all'ordine k incluso. Sia, poi, $f(x, y_0, y_1, \cdots, y_n)$ una funzione definita in T_n, ivi continua con tutte le sue derivate parziali all'ordine $n+1$ incluso. È evidente che il funzionale

$$J_f[y(x)]=\int_a^b f(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x))\, dx$$

è definito per tutte le funzioni $y(x) \in C_{2n}$.

Siano dati, inoltre, in modo arbitrario, $2n$ numeri: $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$; $b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}$. Si dice che la funzione $f_n(x, y_0, y_1, \cdots, y_n)$ è una funzione di invarianza, se per ogni funzione $y(x) \in C_{2n}$, verificante le condizioni

$$(1) \qquad y^{(i)}(a)=a_i \quad , \quad y^{(i)}(b)=b_i \qquad (i=0, 1, \cdots, n-1)$$

il funzionale $J_f[y(x)]$ ha sempre lo stesso valore.

(*) Nella seduta del 13 marzo 1965.

2. Definiamo, in T_{2n}, la funzione $L_f(x, y_0, y_1, \cdots, y_{2n})$ nel modo seguente: prendiamo una funzione $y(x) \in C_{2n}$, eseguiamo tutte le derivazioni nell'espressione di Eulero:

$$f_{y_0}(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x) - \frac{d}{dx} f_{y_1}(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)) + \cdots$$

$$\cdots + (-1) \frac{d^n}{dx^n} f_{y_n}(x, y(x, y'(x), \cdots, y^{(n)}(x))$$

e poi poniamo nell'espressione ottenuta: $y^{(i)}(x) = y_i$ $(i = 0, 1, \cdots, 2n)$. Si ha allora il

LEMMA I. – *Condizione necessaria e sufficiente perché la funzione* $f(x, y_0, y_1, \cdots, y_n)$ *sia una funzione di invarianza è che la funzione* L_f *sia identicamente* 0:

$$(2) \qquad L_f(x, y_0, y_1, \cdots, y_{2n}) = 0 \qquad \text{per} \quad (x, y_0, y_1, \cdots, y_{2n}) \in T_{2n}.$$

La necessità della condizione (2) è ovvia. Per provare anche la sufficienza, consideriamo due funzioni: $y_1(x) \in C_{2n}$ e $y_2(x) \in C_{2n}$, verificanti le relazioni (1), e consideriamo la funzione

$$\varphi(t) = J_f[y_1(x) + t(y_2(x) - y_1(x))] \qquad \text{per} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

È evidente che la funzione

$$y_1(x) + t(y_2(x) - y_1(x))$$

appartiene a C_{2n} ed anche che la $\varphi(t)$ è differenziabile in $(0, 1)$. Si verifica immediatamente, in forza della (1), che:

$$\varphi'(t) = \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t} f\right) dx = \int_a^b \sum_0^n \{\tilde{f}_{y_i} \cdot (y_2^{(i)}(x) - y_1^{(i)}(x))\} dx =$$

$$= \int_a^b \left\{\tilde{f}_{y_0} - \frac{d}{dx} \tilde{f}_{y_1} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \tilde{f}_{y_n}\right\} (y_2(x) - y_1(x)) dx =$$

$$= \int_a^b \tilde{L} \cdot (y_2(x) - y_1(x)) dx$$ [1].

Da cui segue che

$$\varphi'(t) = 0 \qquad \text{per} \quad 0 < t < 1,$$

e quindi

$$\varphi(1) = \varphi(0) = J_f[y_2(x)] = J_f[y_1(x)].$$

Con ciò il Lemma I è dimostrato.

(1) Con il segno $\sim$ vogliamo indicare il fatto che gli argomenti delle funzioni assegnate sono i seguenti: $y_1^{(i)}(x) + t(y_2^{(i)}(x) - y_1^{(i)}(x))$, $i = 0, 1, \cdots, n$ risp. $i = 0, 1, \cdots, 2n$.

Sia ora m un numero intero arbitrario maggiore di $2n$. Consideriamo adesso soltanto le funzioni che appartengono alla classe C_m e che soddisfano alla seguente condizione, più generale della (1):

$$y^{(i)}(a) = a_i \quad , \quad y^{(i)}(b) = b_i \qquad (i = 0, 1, \cdots, n) \tag{3}$$

dove i numeri a_n, b_n sono arbitrariamente fissati. Se l'integrale $J_f[y(x)]$ assume sempre lo stesso valore rispetto a questa classe più ristretta di funzioni, allora diciamo che $f(x, y_0, y_1, \cdots, y_n)$ è una funzione di invarianza per il *problema modificato*. Si prova però, in modo ovvio, che anche in questo caso la condizione (2) è una condizione necessaria affinché la funzione f sia una funzione di invarianza per il problema modificato. Poiché la (2) è una condizione necessaria e sufficiente per il problema originale, si ha il seguente:

LEMMA II. – *Se la funzione $f(x, y_0, y_1, \cdots, y_n)$ è una funzione di invarianza per il problema modificato, allora lo è anche per il problema originale.*

3. Il calcolo della funzione L_f e la soluzione dell'equazione $L_f = 0$ presenta già nel caso $n = 2$ diverse difficoltà. Per questa ragione, per determinare tutte le funzioni di invarianza, conviene cercare qualche altro metodo.

Nel caso $n = 1$ si prova molto facilmente che una funzione $f(x, y_0, y_1)$ è una funzione di invarianza se, e soltanto se, essa ha la forma

$$f = N(x, y_0) + M(x, y_0) y_1 ,$$

dove $N_y = M_x$ in T_0. D'altra parte, tutte queste funzioni si ottengono nel modo seguente: si prende una funzione arbitraria $F(x, y)$ e poi si considera l'integrale

$$\int_a^b \frac{d}{dx} F(x, y(x)) \, dx = \int_a^b \{ F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x)) \, y'(x) \} \, dx$$

per ogni $y(x) \in C_2$, verificante le convenienti condizioni (1). Nei casi $n > 1$, come si vede subito, si può ragionare nel modo seguente: Date le funzioni

$$F^i(x, y_0, \cdots, y_i) \qquad (i = 0, 1, \cdots, n - 1)$$

in modo arbitrario, si considerino gli integrali

$$\int_a^b \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} F^i(x, y(x), \cdots, y^{(i)}(x)) \, dx \qquad (i = 0, 1, \cdots, n - 1). \tag{4}$$

È evidente che tutti questi integrali, calcolati sulle funzioni di C_{2n} che verificano la (1), hanno sempre valori costanti, cioè indipendenti dalla funzione $y(x)$. In tal modo – facendo eventualmente anche la loro somma – si ottengono funzioni di invarianza. Ma si vede subito che gli integrali del tipo (4) per $i = 0, 1, \cdots, n - 2$ si riducono tutti agli integrali del tipo tipo (4) per

$i = n - 1$. Sorge allora la questione di vedere se le funzioni di invarianza che si ottengono dall'integrale di tipo

$$\int_a^b \frac{d}{dx} F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n-1)}(x))\, dx$$

forniscono la totalità delle funzioni di invarianza. A questo problema dà una risposta positiva il seguente:

4. TEOREMA. – *Condizione necessaria e sufficiente perché la funzione* $f(x, y_0, y_1, \cdots, y_n)$ *sia una funzione di invarianza è che si possa scrivere nella forma*

$$(5) \qquad f = \alpha^n (x, y_0, \cdots, y_{n-1}) + a_0^n (x, y_0, \cdots, y_{n-1}) y_1 + \cdots \\ \cdots + a_{n-1}^n (x, y_0, \cdots, y_{n-1}) y_n,$$

dove le funzioni α^n, a_i^n $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ *soddisfano alle identità;*

$$(6) \qquad \frac{\partial \alpha^n}{\partial y_i} = \frac{\partial a_i^n}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial a_j^n}{\partial y_k} = \frac{\partial a_k^n}{\partial y_j},$$

$$i, j, k = 0, 1, \cdots, n-1 \quad , \quad j \neq k; (x, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}) \in T_{n-1}.$$

La sufficienza essendo ovvia (in virtù delle (5) e (6)), dimostriamo la necessità delle condizioni (5) e (6). Osserviamo intanto che, se la f è una funzione di invarianza, essa, in forza della ben nota condizione di Legendre, deve avere la forma

$$f = A(x, y_0, \cdots, y_{n-1}) + B(x, y_0, \cdots, y_{n-1}) y_n \qquad \text{in } T_n.$$

Per provare la necessità delle condizioni (5) e (6) procediamo per induzione rispetto ad n:

a) Per $n = 1$ l'affermazione è ovvia. Noi la dimostriamo anche per $n = 2$ per illustrare il ragionamento che poi faremo in generale. Supponiamo dunque che la funzione

$$f_2 = A_2(x, y_0, y_1) + B_2(x, y_0, y_1) y_2$$

sia una funzione di invarianza. Prendiamo allora una funzione $\Phi(x, y_0, y_1)$ tre volte differenziabile soggetta alla condizione seguente:

$$\Phi_{y_1}(x, y_0, y_1) = B_2(x, y_0, y_1) \qquad \text{in } T_1.$$

È evidente che le funzioni

$$(7_1) \qquad \bar{f}_2 = \Phi_x(x, y_0, y_1) + \Phi_{y_0}(x, y_0, y_1) y_1 + \Phi_{y_1}(x, y_0, y_1) y_2,$$

$$(7_2) \qquad f_2 - \bar{f}_2 = A_2(x, y_0, y_1) - \Phi_x(x, y_0, y_1) - \Phi_{y_0}(x, y_0, y_1) y_1$$

sono funzioni di invarianza. La funzione (7_2) non contiene la variabile y_2, quindi *è una funzione di invarianza anche per il problema modificato* dove $n = 1$, $m = 4$. In virtù del Lemma II la (7_2) deve avere la forma

$$f_2 - \bar{f}_2 = A_2 - \Phi_x - \Phi_{y_0} \cdot y_1 = \alpha^1(x, y_0) + a_0^1(x, y_0)\, y_1 \qquad \text{in } T_1,$$

dove

$$\frac{\partial}{\partial y_0}\alpha^1(x, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} a_0^1(x, y_0) \qquad \text{in } T_0. \tag{8}$$

Si ha dunque:

$$f_2 \equiv (\alpha^1 + \Phi_x) + (a_0^1 + \Phi_{y_0})\, y_1 + \Phi_{y_1} \cdot y_2 .$$

Preso $\alpha^2 = \alpha^1 + \Phi_x$, $a_0^2 = a_0^1 + \Phi_{y_0}$, $a_1^2 = \Phi_{y_1}$ e tenendo presente la (8), si vede subito che f_2 è della forma (5) ed anche le che condizioni (6) sono soddisfatte. Con ciò la necessità è provata per il caso $n = 2$.

b) Nel caso generale si ragiona analogamente al caso $n = 2$. Supponiamo che l'affermazione sia stata già provata nel caso $n - 1$ (≥ 2), e dimostriamola per n. Prendiamo una funzione di invarianza per il caso n:

$$f_n = A_n(x, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}) + B_n(x, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})\, y_n .$$

Sia adesso $\psi(x, y_0, \cdots, y_{n-1})$ una funzione $(n + 1)$–volte differenziabile la quale soddisfa alla identità

$$\frac{\partial}{\partial y_{n-1}} \psi(x, y_0, \cdots, y_{n-1}) = B_n(x, y_0, \cdots, y_{n-1}) \qquad \text{in } T_{n-1}.$$

È ovvio che le funzioni

$$\bar{f}_n = \psi_x + \psi_{y_0} \cdot y_1 + \cdots + \psi_{y_{n-1}} \cdot y_n , \tag{9_1}$$

$$f_n - \bar{f}_n = A_n - \psi_x - \psi_{y_0} \cdot y_1 - \cdots - \psi_{y_{n-2}} \cdot y_{n-1} \tag{9_2}$$

sono funzioni di invarianza. Poiché la (9_2) non contiene la variabile y_n, essa è una funzione di invarianza per il problema modificato (caso $n - 1$, $m = 2n$). In forza del Lemma II la funzione (9_2) deve avere la forma

$$f_n - \bar{f}_n = \alpha^{n-1}(x, y_0, \cdots, y_{n-2}) + a_0^{n-1}(x, y_0, \cdots, y_{n-2}) \cdot y_1 + \cdots$$
$$\cdots + a_{n-2}^{n-1}(x, y_0, \cdots, y_{n-2}) \cdot y_{n-1} ,$$

dove

$$\frac{\partial \alpha^{n-1}}{\partial y_i} = \frac{\partial a_i^{n-1}}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial a_j^{n-1}}{\partial y_k} = \frac{\partial a_k^{n-1}}{\partial y_j} \qquad \text{in } T_{n-2}, \tag{10}$$

$$i, j, k = 0, 1, \cdots, n - 2, \; j \neq k.$$

Si ha dunque

$$f_n \equiv (\alpha^{n-1} + \psi_x) + (a_0^{n-1} + \psi_{y_0}) \cdot y_1 + \cdots + (a_{n-2}^{n-1} + \psi_{y_{n-2}}) \cdot y_{n-1} + \psi_{y_{n-1}} \cdot y_n .$$

Preso $\alpha^n \equiv \alpha^{n-1} + \psi_x$; $a_i^n \equiv a_i^{n-1} + \psi_{y_i}$ $(i = 0, \cdots, n-2)$; $a_{n-1}^n = \psi_{y_{n-1}}$ e tenuto conto delle condizioni (10), si vede che la f_n è della forma (5) ed anche che che le condizioni (6) sono soddisfatte.

Con questo il Teorema è dimostrato completamente.

5. Facciamo le seguenti osservazioni:

a) Nel caso $n = 2$ si può calcolare molto facilmente la funzione $L_f(x, y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$. Tenuto conto della forma della funzione di f:

$$f = A(x, y_0, y_1) + B(x, y_0, y_1)\, y_2$$

si prova (ved. [13]) che la identità (2) in questo caso è equivalente al seguente sistema di equazioni a derivate parziali:

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} 2\, B_{y_0} - A_{y_1 y_1} + B_{x y_1} + B_{y_0 y_1} \cdot y_1 = 0 \\ A_{y_0} - A_{x y_1} + B_{xx} + (2\, B_{x y_0} - A_{y\, y_{01}}) \cdot y_1 + B_{y_0 y_0} \cdot y_1^2 = 0 . \end{cases}$$

Dal Teorema segue che la soluzione generale del sistema (11) ha la forma seguente:

$$A = a(x, y_0, y_1) + b(x, y_0, y_1)\, y_1 \quad ; \quad B = c(x, y_0, y_1),$$

dove

$$a_{y_0} = b_x \quad , \quad a_{y_1} = c_x \quad , \quad b_{y_1} = c_{y_0} \qquad \text{in } T_1 .$$

b) Se non prendiamo in considerazione le condizioni (1) o interamente o parte, allora si tratta del cosidetto problema degli estremi liberi. Con il ragionamento eseguito si possano dare le più generali funzioni di invarianza anche in questo caso, ma oltre alle condizioni (5) e (6) si presentano anche nuove condizioni negli estremi.

BIBLIOGRAFIA.

[1] M. PICONE, *Su un criterio sufficiente in un classico problema di calcolo delle variazioni*, «Atti Acc. Naz. Lincei», *28*, fasc. 2 (1960).

[2] — *Su un criterio sufficiente in un classico problema di calcolo delle variazioni*, «Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino», *94* (1959–60).

[3] — *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di una funzione reale di variabili reali*, «Atti Acc. Naz. Lincei, Memorie», *6*, fasc. 3 (1961)

[4] — *Nuovi criteri sufficienti in un classico problema di calcolo delle variazioni*, «Annali di Mat. pura ed applicata», LIII, 119–138 (1961).

[5] — *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale bidimensionale del secondo ordine nello scalare minimante e conseguenti limitazioni per gli autovalori di un parametro da cui dipende un'equazione euleriana a derivate parziali del quart'ordine*, «Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino», *95* (1960–61).

[6] — *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale unidimensionale del primo ordine nel vettore minimante*, «Atti Acc. Naz. Lincei, Memorie», *6*, fasc. 4 (1961).

[7] M. PICONE, *Criteri di secondo grado sufficienti per il minimo assoluto di un integrale pluridimensionale del primo ordine nel vettore minimante*, « Atti Acc. Naz. Lincei », vol. XXXII, fasc. 1, (1962).

[8] — *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale pluridimensionale del primo ordine nel vettore minimante*, « Atti Acc. Naz. Lincei, Memorie », vol. VI, fasc. 11 (1962).

[9] — *Criteri sufficienti nel calcolo delle variazioni e loro applicazioni*, « Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino » (1964).

[10] A. KÓSA, *Un criterio sufficiente per il minimo assoluto nel caso di estremi variabili*, « Atti Acc. Naz. Lincei », vol. XXX, fasc. 5 (1961).

[11] — *Un criterio sufficiente per il minimo assoluto degli integrali doppi nel caso di contorno variabile*, « Atti Acc. Naz. Lincei », vol. XXX, fasc. 6 (1961).

[12] — *Un criterio sufficiente per il minimo assoluto nel caso in cui l'integrale dipende anche dalle derivate di ordine superiore delle finzioni ammissibili*, « Atti Acc. Naz. Lincei », vol XXXIV, fasc. 2 (1963).

[13] — *Sulle funzioni d'invarianza per i problemi del calcolo delle variazioni unidimensionali di secondo ordine*, « Atti Acc. Naz. Lincei », vol. XXXIV, fasc. 5 (1963).