Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alexandre Froda

La constante d'Euler est irrationnelle

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.3, p. 338–344.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_3_338_0>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Teoria dei numeri. — *La constante d'Euler est irrationnelle.* Nota di ALEXANDRE FRODA, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

Cette Note se propose de prouver l'irrationalité de la constante $\mathcal{C}$ de Euler (1) par un des critères paramétriques de [1].

On définit $\mathcal{C}$ – comme de coutume – par la formule

$$(1) \qquad \mathcal{C} = \lim_{r \sim \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r} - \mathrm{L}r\right),$$

où $\mathrm{L}\mu$ désigne le logarithme naturel du nombre réel $\mu > 0$. En reprenant des notations antérieures, on pose

$$(2) \qquad \alpha = \mathcal{C} \quad , \quad \alpha_r^* = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r} - \mathrm{L}r \quad , \quad r \in \mathrm{S} = \{1, 2, \cdots\}.$$

Puisque α_r^* décroît (2) lorsque r parcourt la suite croissante S des nombres naturels, on est dans un des cas $\boldsymbol{a}^*$ de [1], avec

$$(3) \qquad \alpha = \lim_{r \sim \infty} \alpha_r^* \qquad (\alpha = \mathcal{C}).$$

On appliquera au nombre limite α le critère paramétrique d'irrationalité C_1^* de [1], étendu (3) en renonçant à la supposition de son énoncé, selon laquelle les nombres α_r^*, qui tendent vers α, devraient être rationnels. Or cette condition supplémentaire est superflue, comme il résulte de la démonstration même du critère C_1^*, donnée en [1] (4).

On pose

$$(4) \qquad \alpha_r^* = \frac{y_r^*}{x_r} \quad , \quad x_r = r! \qquad (r \in \mathrm{S})$$

(*) Nella seduta del 13 febbraio 1965.

(1) L'irrationalité de $\mathcal{C}$ est présumée en [3] § 4.2, quoique « encore non–demontrée ».

(2) La décroissance des α_r^* pour $r > r_0$ (assez grand), lorsque r parcout S en croissant, est strictement impliquée par:

$$\Delta\alpha_r^* = \alpha_{r+1}^* - \alpha_r^* = \frac{1}{r+1} - \mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{r}\right) < \frac{1}{r+1} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2r^2}\right) = \frac{-r+1}{2r^2(r+1)} < 0.$$

(3) Une extension pareille a été introduite aussi pour le cas $\boldsymbol{a}$ de [1], où les nombres α_r, tendant en croissant vers α, ont été supposés rationnels dans l'énoncé du critère C_1. On a étendu ce critère en [2], en y renonçant à cette condition supplémentaire qui n'intervient pas dans la démonstration du critère C_1, donnée en [1].

(4) Dans le cas présent, les valeurs α_r^* $(r \neq 1)$ définies en (2) sont irationnelles, tout comme les $\mathrm{L}r (r \in \mathrm{S})$ respectifs, dont elles ne diffèrent que par des nombres fractionnaires.

et l'on choisit les paramètres

$$(5) \qquad q_r = \frac{r!}{r+1} \qquad (r \in S)\ [5].$$

On a donc, en vertu de (4), (5),

$$(6) \qquad \frac{x_r}{q_r} = r+1 \quad , \quad \frac{y_r^*}{q_r} = \frac{x_r}{q_r} \cdot \frac{y_r^*}{x_r} = (r+1)\,\alpha_r^* \qquad (r \in S).$$

Le critère C_1^*, étendu au sens de la remarque precédente, s'exprime par la paire des conditions ([1], 2.2.) qui suivent.

A_1^* : On a, pour tout $r > r_0$ (assez grand) l'inégalité (stricte)

$$(7) \qquad \frac{y_{r+1}^* - p_{r+1}\, y_r^*}{x_{r+1} - p_{r+1}\, x_r} < \frac{y_{r+2}^* - p_{r+2}\, y_{r+1}}{x_{r+2} - p_{r+2}\, x_{r+1}}, \qquad (r \in S),$$

où l'on a posé, par définition,

$$p_{r+1} = \frac{q_{r+1}}{q_r} \qquad (r \in S).$$

B_1^*: Pour une suite infinie, croissante, S_1, d'indices $r = r_\nu$, on a les inégalités (au sens large)

$$(8) \qquad \xi_{r_\nu}^* \geq \xi_{r_{\nu+1}}^* \quad , \quad \eta_{r_\nu}^* \geq \eta_{r_{\nu+1}}^* \qquad (r_\nu < r_{\nu+1},\ \nu \in S),$$

où l'on a, car c'est un des cas $\boldsymbol{a}^*$ de [1] 1.2,

$$(9) \qquad \xi_r^* = F\frac{x_r}{q_r} \quad , \quad \eta_r^* = 1 - F\frac{y_r^*}{q_r} \qquad (r \in S)\ [6].$$

On peut aussi rendre le critère C_1^* sous la forme plus commode des quatre conditions simultanées suivantes, suffisantes dans leur ensemble à l'irrationnalité de α, limite décroissante des α_r^*. La paire A_1^*1, A_1^*2 implique A_1^*, tandis que la paire B_1^*1, B_1^*2 équivaut à B_1^*.

Condition A_1^*1. – Pour tout $r > r_0$, où r_0 est assez grand, on a l'inégalité (stricte)

$$(10) \qquad \frac{y_{r+1}^*}{q_{r+1}} - \frac{y_r^*}{q_r} < \frac{y_{r+2}^*}{q_{r+2}} - \frac{y_{r+1}^*}{q_{r+1}} \qquad (r \in S);$$

(5) Les paramètres q_r satisfont ici aux conditions générales [6] et [4] a^* de [1], car en vue de [4], [5], [6] on a $\lim x_r/q_r = \infty$, pour $r \sim \infty$ et aussi $p_{r+1} = \dfrac{q_{r+1}}{q_r} = \dfrac{(r+1)^2}{r+2}$. L'on en tire $p_{r+1} < \dfrac{y_{r+1}^*}{y_r^*} = (r+1)\dfrac{\alpha_{r+1}^*}{\alpha_r^*}$, car on a l'inégalité (*) $(r+1)\,\alpha_r^* < (r+2)\,\alpha_{r+1}^*$, $r \in S$, qui équivaut à $\alpha_r^* + (r+2)\left[\dfrac{1}{r+1} - L\left(1+\dfrac{1}{r}\right)\right] > 0$, $(r \in S)$.

Or cette inégalité est satisfaite pour tout $r \in S$, comme on le vérifie directement pour $r = 1$, $r = 2$ et qu'il résulte pour tout $r \geq 3$, car $L\left(1+\dfrac{1}{r}\right) < \dfrac{1}{r}$ et qu'on a $\alpha_r^* > \mathcal{C} > \dfrac{1}{2}$.

(6) Pour tout μ réel, on pose $F\mu = \mu - E\mu$, où $E\mu$ est l'entier satisfaisant à $\mu - 1 < E\mu \leq \mu$, de sorte que l'on a $0 \leq F\mu < 1$.

Condition $A_1^* 2$. – Pour tout $r > r_0$, on a l'inégalité (large)

$$\frac{x_{r+1}}{q_{r+1}} - \frac{x_r}{q_r} \geq \frac{x_{r+2}}{q_{r+2}} - \frac{x_{r+1}}{q_{r+1}} > 0 \qquad (r \in S)\,; \tag{11}$$

Condition $B_1^* 1$. – Pour chaque indice $r = r_\nu$ d'une suite infinie, croissante, convenable $S_1 \subset S$, on a l'inégalité (large)

$$\xi_{r_\nu}^* \geq \xi_{r_{\nu+1}}^* \qquad (r_\nu < r_{\nu+1}\,,\ \nu \in S); \tag{12}$$

Condition $B_1^* 2$. – On a aussi, pour la même suite $S_1 \subset S$ d'indices $r = r_\nu$ infinie, croissante, l'inégalité (large)

$$\eta_{r_\nu}^* \geq \eta_{r_{\nu+1}}^* \qquad (r_\nu < r_{\nu+1}\,,\ \nu \in S). \tag{13}$$

On procèdera a une démonstration par l'absurde de l'irrationalité de $\alpha = \mathcal{C}$, en vérifiant d'abord que les trois conditions précédentes $A_1^* 1$, $A_1^* 2$, $B_1^* 1$ sont satisfaites, si l'on a choisi convenablement comme ci-dessus en (5) la suite de paramètres q_r $(r \in S)$. En voici le détail.

$A_1^* 1$ – En vertu de (6), on écrit (10) sous la forme

$$2\,(r+2)\,\alpha_{r+1}^* < (r+3)\,\alpha_{q+2}^* + (r+1)\,\alpha_r^*\,, \tag{14}$$

qui revient, après diverses simplifications, à

$$(r+3)\,L\left(1+\frac{2}{r}\right) < \frac{1}{r+2} + 2\,(r+2)\,L\left(1+\frac{1}{r}\right). \tag{15}$$

En y divisant ensuite chaque membre par r^2, après leur multiplication par $r+2$, on obtient l'inégalité

$$\left(1+\frac{2}{r}\right)\left(1+\frac{3}{r}\right)L\left(1+\frac{2}{r}\right) < \frac{1}{r^2} + 2\left(1+\frac{2}{r}\right)^2 L\left(1+\frac{1}{r}\right); \tag{16}$$

celle-ci, par développement, se met sous la forme equivalente

$$\frac{2}{r} + \frac{8}{r^2} + \frac{\lambda_r}{r^3} < \frac{2}{r} + \frac{16}{r^2} + \frac{\mu_r}{r^3}\,, \tag{17}$$

où λ_r, μ_r restent finies pour tout $r > r_0$, assez grand. Cela justifie l'inégalité (10) et prouve la condition $A_1^* 1$.

$A_1^* 2$. – En s'appuyant sur (6), on écrit (11) sous la forme

$$(r+2) - (r+1) \geq (r+3) - (r+2) > 0\,,$$

qu'on vérifie directement.

$B_1^* 1$. – En vertu de la définition (9), l'inégalité (12) s'écrit

$$F\,\frac{x_r}{q_r} \geq F\,\frac{x_{r'}}{q_{r'}}\,, \tag{18}$$

où r, r' désignent aussi les nombres naturels

$$r = r_\nu \quad , \quad r' = r_{\nu+1} \qquad (r < r'\,,\ \nu \in S), \tag{19}$$

représentant des termes consécutifs d'une suite infinie et croissante $S_1 \subset S$, à fixer convenablement. Or, en invoquant (6), cela revient à l'inégalité (large)

$$F(r+1) \geq F(r'+1); \tag{20}$$

celle-ci est vérifiée pour toute suite $S_1 \subset S$, infinie et croissante, d'indices nombres naturels, car on a pour chaque entier μ l'égalité $F\mu = 0$, ce qui confirme $B_1^* 1$.

$B_1^* 2$. – On reprend la démonstration de l'irrationalité de α, en admettant – par absurde – l'hypothèse de la rationalité de $\mathfrak{C}$ défini en (1). On pose donc

$$\alpha = \frac{u}{v}, \tag{21}$$

où u, v sont des nombres naturels, premiers entre eux. Comme on a (6), (9), l'inégalité (13) revient, pour une suite convenable S_1, croissante et infinie, d'indices (19) à

$$F[(r+1)\alpha_r^*] \leq F[(r'+1)\alpha_{r'}^*] \qquad (r, r' \in S_1); \tag{22}$$

relation valable – comme on va le voir – pour tout $r > r_0$, où r_0 est assez grand, déterminé, et pour un $r' > r$, convenable, attaché à r.

En se donnant un $\varepsilon > 0$ très petit, on va prouver, en effet, qu'on peut lui attacher un r_0 assez grand, pour que $r > r_0$ implique l'existence d'un $r' > r$, tel que (22) soit la conséquence d'une certaine relation (à trouver)

$$F[(r'+1)\alpha_{r'}^*] = F[(r+1)\alpha_r^*] + \varepsilon' \qquad (0 \leq \varepsilon' < \varepsilon), \tag{23}$$

ce qui exige que ε soit pris inférieur à $1 - F[(r+1)\alpha_r^*] > 0$.

On construira la suite infinie S_1 par induction de ν à $\nu + 1$ ($\nu \in S$), en se donnant à chaque pas un $\varepsilon = \varepsilon_\nu$. On aura une solution, à la condition admise par la suite et exprimée par l'inégalité

$$\sum_\nu \varepsilon_\nu < 1 - F[(r_1+1)\alpha_{r_1}^*] \qquad \nu \in S, \tag{24}$$

où r_1 est le premier terme de S_1 ($\nu_1 = 1$).

Pour la demonstration, on pose d'abord

$$\Delta_r = (r+2)\alpha_{r+1}^* - (r+1)\alpha_r^* > 0 \qquad (r \in S). \tag{25}$$

Après simplification, cette égalité s'écrit, en y développant $L\left(1 + \frac{1}{r}\right)$,

$$\Delta_r = \alpha_{r+1}^* - \frac{1}{2r} + \frac{1}{6r^2}\left(1 - \frac{1}{2r} + \frac{\beta_r}{r^2}\right) \qquad (r > 1), \tag{25a}$$

où β_r est une fonction de $1/r$, qui reste finie pour $r \sim \infty$.

Soient $t \geq 0$ un paramètre entier et $h \in S$ une de ses valeurs. En remplacant r par $r + t$ en (25), l'on y prend $t = 0, 1, \cdots, h - 1$ et l'on obtient par addition

$$\sum_{t=0}^{h-1} \Delta_{r+t} = (r+h+1)\alpha_{r+h}^* - (r+1)\alpha_r^*. \tag{26}$$

En procédant de même, à partir de (25*a*), on obtient

$$(27)\qquad \sum_{t=0}^{h-1}\Delta_{r+t}=\sum_{t=0}^{h-1}\left[\alpha^*_{r+t+1}-\frac{1}{2(r+t)}\right]+\sum_{t=0}^{h-1}\left[\frac{1}{6(r+t)^2}\left(1-\frac{1}{2(r+t)}+\frac{\beta_{r+t}}{(r+t)^2}\right)\right],$$

dont chaque terme Σ du second membre est une fonction de r et de h, désignée par $\varphi(r,h)$ et $\psi(r,h)$ respectivement.

En égalant (26) et (27), on y pose

$$(28)\qquad r'=r+h$$

et l'on obtient

$$(29)\qquad (r'+1)\,\alpha^*_{r'}=(r+1)\,\alpha^*_r+\varphi(r,h)+\psi(r,h),$$

où l'on a pour tout $r\in S$ l'inégalité $\varphi(r,h)>0$, qui résulte des relations $\alpha^*_{r+t+1}>\mathcal{C}>\frac{1}{2(r+t)}$. En parcourant S, on prouve l'existence d'un h auquel correspond en (28) un nombre naturel r' vérifiant (22).

On le démontre en commençant par remarquer que, pour tout $r>\bar{r}_1$, assez grand, convenable, on a pour tout h arbitraire;

$$(30)\qquad r>\bar{r}_1\Rightarrow 0<\psi(r,h)<\frac{1}{2}\,\varepsilon \qquad (h\in S);$$

car $\sum_{t=0}^{h-1}\frac{1}{6(r+t)^2}$ est une majorante de $\psi(r,h)$ et une fonction de r tendant à zéro, pour tout h fixe et $r\sim\infty$. En vertu de la définition de $\varphi(r,h)$ en (27) on peut écrire

$$(31)\qquad \varphi(r,h)-h\alpha=\sum_{t=0}^{h-1}(\alpha^*_{r+t+1}-\alpha)-\sum_{t=0}^{h-1}\frac{1}{2(r+t)},$$

où chaque somme Σ du second membre est une fonction de r et de h, à désigner par $\varphi_1(r,h)$ et $-\varphi_2(r,h)$ respectivement.

Or, en vertu de l'hypothèse (21), on peut distinguer, parmi les valeurs $h\in S$, les nombres naturels

$$(32)\qquad h_m=mv \qquad (m\in S);$$

et l'on vérifie, en invoquant (21), qu'on a aussi

$$(33)\qquad h_m\,\alpha=mu \qquad (mu\in S).$$

De (29), (31), (33), on obtient pour $h=h_m$ l'égalité

$$(34)\qquad (r'+1)\,\alpha^*_{r'}-mu=(r+1)\,\alpha^*_r+\varphi_1(r,h_m)-\varphi_2(r,h_m)+\psi(r,h_m).$$

On va prouver l'existence d'une valeur m_0 de l'indice $m\in S$, telle que pour tout $r>\bar{r}_2$ assez grand, convenable, on ait:

$$(35)\qquad m=m_0\,,\ r>\bar{r}_2\Rightarrow 0<F\left[\varphi_2(r,h_m)\right]<\psi(r,h_m)=\psi^{(m)}.$$

En effet, pour tout r fixe, la somme $\varphi_2(r, h)$, distinguée en (31), croît avec h et tend à l'infini, la série $\sum_t^{\infty} \frac{1}{2(r+t)}$ étant divergente. On prouve (35), en utilisant la représentation usuelle des nombres et des intervalles sur l'axe réel, ainsi que leurs congruences modulo 1 [(7)].

Soit $i_m = [\varphi^{(m)}, \varphi^{(m+1)}]$ l'intervalle réel, où $\varphi^{(m)} = \varphi_2(r, h_m)$. En passant de m à $m+1$, et compte tenu de la définition de $\varphi_2(r, h)$ précédente, la longueur de i_m satisfera à

$$(36) \qquad 0 < \varphi_2(r, h_{m+1}) - \varphi_2(r, h_m) < \frac{v}{2(r+mv)}$$

et tendra donc vers zéro, lorsque r tend à l'infini, pour m donné.

Il en résulte que la longueur globale de deux intervalles contigus donnés i_m et i_{m-1} peut etre rendue inférieure à $\frac{1}{2}\varepsilon$, pour tout $r > \bar{r}_2$, où $\bar{r}_2$ est assez grand, convenable et $\bar{r}_2 \geq \bar{r}_1$, où $\bar{r}_1$ paraît en (30). En fixant ainsi r, on pourra distinguer les indices $m \in S$, tels qu'en i_{m-1} se trouve un point d'abscisse entière; et alors l'intervalle $F(i_m)$, congruent à i_m modulo 1, sera un intervalle contenu en $[0, \psi^{(m)})$, en vertu de (30) et de l'inégalité concernant la longueur de $i_{m-1} \cup i_m$, pour r assez grand.

Soit m_0 le plus petit des m ainsi distingués. En le choisissant, on calcule h_{m_0} par (32) et il en résulte la vérification directe de (35) par la construction de $F(i_{m_0})$, qu'on vient d'indiquer.

En faisant appel à la définition de $\varphi_1(r, h)$ en (31), on remarque qu'on peut obtenir

$$(37) \qquad 0 < \varphi_1(r, h_{m_0}) = \sum_{t=0}^{h_{m_0}-1} (\alpha^*_{r+t+1} - \alpha) < h_{m_0}(\alpha^*_{r+1} - \alpha) < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

pour tout $r > \bar{r}_3$, assez grand, convenable. Or, par définition,

$$(38) \qquad \varphi_2(r, h_{m_0}) = E[\varphi_2(r, h_{m_0})] + F[\varphi_2(r, h_{m_0})].$$

L'on pose enfin

$$(39) \qquad r_0 = \max\{\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3\}.$$

L'égalité (34) entraîne donc, par (35), (37), (38), (39) et (30), où l'on introduit $h = h_{m_0}$, la conséquence

$$(40) \qquad r > r_0 \Rightarrow (r' + 1)\alpha^*_{r'} + E[\varphi_2(r, h_{m_0})] - m_0 u$$
$$= (r+1)\alpha^*_r + \{\varphi_1(r, h_{m_0}) + \psi(r, h_{m_0}) - F[\varphi_2(r, h_{m_0})]\}.$$

La différence des deux derniers termes de (40) est positive et inférieure à $\psi(r, h_{m_0}) < \frac{1}{2}\varepsilon$, en vertu de (35).

(7) Un intervalle $j = (\lambda, \mu)$ de l'axe réel a, parmi ses congruents modulo 1, l'intervalle $Fj = (F\lambda, F\mu)$, où l'opérateur F répond à la définition donnée en (6).

On obtient l'inégalité (22) à démontrer, en prenant ε assez petit et en négligeant l'entier $E[\varphi_2(r, h_{m_0})] - m_0 u$, compte tenu de (33); car on n'a qu'à remarquer, de plus, que (30), (35), (37), (39) entraînent, pour $r > r_0$,

$$0 < \varepsilon' = \varphi_1(r, h_{m_0}) + \psi(r, h_{m_0}) - F[\varphi_2(r, h_{m_0})] < \varepsilon, \tag{41}$$

et l'on est conduit à une relation de la forme (23), qui implique directement (22).

En se donnant enfin des $\varepsilon = \varepsilon_\nu$ ($\nu \in S$) satisfaisant à (24), et en itérant indéfiniment le procédé qu'on vient de' achever, on construira successivement, par induction, à partir de r donné, la suite infinie croissante S_1 des r_ν; et la condition B_1^* 2 sera satisfaite.

En résumé, les quatre conditions suffisantes d'irrationalité de α – du critère C_1^* – seraient donc vérifiées à la fois, dans l'hypothèse (21) de rationalité de α, ce qui en prouve l'absurdité. Son contraire a été donc démontré, c'est-à-dire le nombre $\alpha = \mathcal{C}$ est irrationnel.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. FRODA, *Critères paramétriques d'irrationalité*, «Mathematica Scandinavica, Kobenhavn», *12*, 199–208 (1963).

[2] A. FRODA, *Sur l'irrationalité du nombre* 2^e, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei» (8), *35*, 472–478 (1963).

[3] HARDY-WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford University Press, 3rd Ed., London 1954.

SUNTO. — Poggiando su di un precedente criterio, di carattere asintotico, si dimostra l'irrazionalità della costante $\mathcal{C}$ di Eulero.