ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

CATALDO AGOSTINELLI

Moto lento stazionario magnetodinamico di un liquido viscoso elettricamente conduttore in un involucro sferico. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 38 (1965), n.3, p. 296–303.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_3_296_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Magnetoidrodinamica. — *Moto lento stazionario magnetodinamico di un liquido viscoso elettricamente conduttore in un involucro sferico.*
Nota I (*) del Corrisp. CATALDO AGOSTINELLI.

Il problema del moto lento stazionario di un liquido viscoso elettricamente conduttore, contenuto in un involucro sferico rigido in movimento, e immerso in un campo magnetico uniforme, ha particolare importanza per lo studio del magnetismo interno della terra (1).

In questa Nota I considero intanto le equazioni magnetoidrodinamiche della massa liquida nell'ipotesi che sia trascurabile la corrente di spostamento in confronto della corrente di conduzione e che la velocità delle particelle fluide e il campo magnetico indotto siano in grandezza sufficientemente piccoli da poter trascurare i termini di ordine superiore al primo.

In tal caso, e nell'ipotesi di moto stazionario, il vettore vortice e il vettore corrente di conduzione sono legati da due equazioni differenziali alle derivate parziali del 2° ordine in cui interviene il Δ_2 di Laplace. Eliminando da queste equazioni, o l'uno o l'altro dei vettori incogniti, si ha che tanto il vortice, quanto la corrente di conduzione soddisfano a una stessa equazione differenziale del 4° ordine in cui figura il doppio Δ_2 di Laplace.

Dopo ciò in questa Nota mi sono proposto di determinare il vettore vortice e il vettore densità di corrente di conduzione per mezzo dei valori comunque assegnati in superficie. La questione è stata ridotta alla risoluzione di due equazioni funzionali indipendenti.

Mostro poi come il problema si risolve col metodo delle approssimazioni successive nel caso in cui il coefficiente di viscosità e il coefficiente di diffusività magnetica soddisfano a una determinata limitazione. Se gli inversi di questi coefficienti sono poi sufficientemente piccoli da poter trascurare i termini di ordine superiore al 2°, si hanno in termini finiti i valori del vettore vortice e del vettore corrente di conduzione in un punto interno della sfera, per mezzo dei valori assegnati in superficie.

Le formule così ottenute si semplificano ulteriormente nel caso particolare in cui l'involucro in cui è contenuto il liquido viscoso, conduttore, si muove con velocità di traslazione uniforme e con velocità angolare di rotazione costante, poiché allora, bagnando il liquido le pareti del recipiente, il vortice in superficie risulta costante.

2. Indicando con $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{a}$ il campo magnetico uniforme in cui è immersa la sfera liquida, avente la direzione del versore costante $\mathbf{a}$, con

(*) Presentata nella seduta del 13 marzo 1965.

(1) Per la questione analoga nel caso dell'Idrodinamica pura vedere la Nota di T. BOGGIO, *Sul moto stazionario lento di una sfera in un liquido viscoso*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », tomo XXX, anno 1910.

$H_0 \mathbf{J}$ la densità di corrente di conduzione, con $\mathbf{v}$ la velocità delle particelle fluide, p la pressione e ρ_0 la densità (costante), con $\mathbf{f}$ la forza di massa, le equazioni da considerare, quando si trascura la corrente di spostamento in confronto della corrente di conduzione, sono

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{H} = H_0 \mathbf{J} \\ \rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho_0 \mathbf{f} + \mu \text{rot } \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} - \text{grad } p + \rho_0 k \Delta_2 \mathbf{v} \\ \text{div } \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot } (\mathbf{H} \wedge \mathbf{v}) = \eta \Delta_2 \mathbf{H}, \\ \text{div } \mathbf{H} = 0, \end{array} \right. \quad (\eta = 1/(\mu\sigma)),$$

dove μ è la permeabilità magnetica del mezzo, σ la conduttività elettrica, e k il coefficiente di viscosità, che supponiamo tutti costanti. Nel caso di piccoli movimenti stazionari, trascurando i termini di ordine superiore al 1° rispetto a $\mathbf{v}$ e sue derivate, si può porre $d\mathbf{v}/dt = 0$. Supponiamo inoltre che le forze di massa derivino da un potenziale U , cioè $\mathbf{f} = \text{grad } U$, e che il campo magnetico indotto, che indichiamo con $H_0 \mathbf{h}$, sia pure stazionario e dell'ordine della velocità. Ponendo allora

$$(2) \quad \mathbf{H} = H_0 (\mathbf{a} + \mathbf{h})$$

le equazioni (1) si riducono alle seguenti

$$(3a) \quad \text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{J}$$

$$(3b) \quad \text{grad} \left(U - \frac{p}{\rho_0} \right) + V_a^2 \text{rot } \mathbf{h} \wedge \mathbf{a} + k \Delta_2 \mathbf{v} = 0$$

$$(3c) \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$(3d) \quad \text{rot} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{v}) = \eta \Delta_2 \mathbf{h}$$

$$(3e) \quad \text{div } \mathbf{h} = 0.$$

dove nella (3b) è $V_a = H_0 \sqrt{\mu/\rho_0}$ la velocità delle onde di Alfvén.

Poiché risulta

$$\text{rot } \mathbf{h} \wedge \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{h}}{dP} \mathbf{a} - \text{grad} (\mathbf{h} \times \mathbf{a}),$$

$$\text{rot} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{v}) = - \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{a},$$

essendo P un punto del mezzo, le equazioni (3b) e (3d) si possono scrivere

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} k \Delta_2 \mathbf{v} = \text{grad} \left(\frac{p}{\rho_0} - U + V_a^2 \mathbf{h} \times \mathbf{a} \right) - V_a^2 \frac{d\mathbf{h}}{dP} \mathbf{a} \\ \eta \Delta_2 \mathbf{h} = - \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{a}, \end{array} \right.$$

dalle quali, prendendo il rotore di ambo i membri, si deducono le equazioni

$$(5) \quad \begin{cases} k\Delta_2(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = -V_a^2 \frac{d(\operatorname{rot} \mathbf{h})}{dP} \mathbf{a} \\ \eta\Delta_2(\operatorname{rot} \mathbf{h}) = -\frac{d(\operatorname{rot} \mathbf{v})}{dP} \mathbf{a}. \end{cases}$$

Introducendo il vortice $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}/2$, e tenendo conto della (3_a), le equazioni (5) si possono scrivere

$$(6_a) \quad \Delta_2 \boldsymbol{\omega} = -\frac{V_a^2}{2k} \frac{d\mathbf{J}}{dP} \mathbf{a}$$

$$(6_b) \quad \Delta_2 \mathbf{J} = -\frac{2}{\eta} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dP} \mathbf{a},$$

che sono due equazioni differenziali che definiscono $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{J}$.

Si riconosce subito che questi due vettori soddisfano a una stessa equazione differenziale del 4° ordine. Invero, applicando l'operatore di Laplace ad ambo i membri della (6_a), e avendo riguardo alla (3_b), si ottiene

$$(7) \quad \Delta_2 \Delta_2 \boldsymbol{\omega} = \frac{V_a^2}{k\eta} \frac{d^2 \boldsymbol{\omega}}{dP^2} \mathbf{a} \mathbf{a}.$$

Identica equazione si ha per la corrente di conduzione.

Scegliendo l'asse z nella direzione e nel verso del versore $\mathbf{a}$, le equazioni (6) diventano ovviamente

$$(6') \quad \begin{cases} \Delta_2 \bar{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{V_a^2}{2k} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial z} \\ \Delta_2 \mathbf{J} = -\frac{2}{\eta} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial z}. \end{cases}$$

3. Ci proponiamo ora di determinare il vortice $\boldsymbol{\omega}$ e la corrente di conduzione $\mathbf{J}$, soddisfacenti, in ogni punto interno alla sfera S di centro O e raggio R , alle equazioni (6') e che sulla superficie σ assumano i valori assegnati

$$(8) \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\sigma, \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_\sigma, \quad (\text{sopra } \sigma).$$

Poiché $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0$, e $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$, per il teorema della divergenza questi valori assegnati in superficie devono soddisfare alle condizioni

$$\int_\sigma \boldsymbol{\omega}_\sigma \times \mathbf{n} \cdot d\sigma = 0, \quad \int_\sigma \mathbf{J}_\sigma \times \mathbf{n} \cdot d\sigma = 0.$$

Ciò premesso poniamo $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ con $\boldsymbol{\omega}_1$ vettore armonico che assume su σ il valore $\boldsymbol{\omega}_\sigma$, ed $\boldsymbol{\omega}_2$ tale che

$$(9) \quad \Delta_2 \boldsymbol{\omega}_2 = -\frac{V_a^2}{2k} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial z}, \quad (\text{in } S) \quad ; \quad \boldsymbol{\omega}_2 = 0, \quad (\text{su } \sigma).$$

Per la formula di Poisson si ha

$$(10) \quad \boldsymbol{\omega}_1(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_\sigma \frac{\boldsymbol{\omega}_\sigma(M)}{r_{PM}^3} d\sigma_M,$$

dove $P(x, y, z)$ è un punto interno alla sfera, $M(x_1, y_1, z_1)$ un punto variabile nell'interno o sopra la superficie σ ; inoltre è $\rho = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, ed $r_{PM} = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$. Essendo poi $G(P, M) = \frac{R}{\rho} \frac{1}{r'} - \frac{1}{r}$ la funzione di Green per la sfera, dove r' è la distanza da M dell'immagine P' di P rispetto alla sfera ed $r = r_{PM}$, il sistema (9) porge

$$(11) \quad \omega_2(P) = \frac{V_a^2}{8\pi k} \int_S G(P, M) \frac{\partial \mathbf{J}(M)}{\partial z_1} dS_M$$

dove si è indicato con dS_M l'elemento di volume della sfera nell'intorno del punto M . Si ha quindi

$$(12) \quad \omega(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\omega_{\sigma}(M)}{r_{PM}^3} d\sigma_M + \frac{V_a^2}{8\pi k} \int_S G(P, M) \frac{\partial \mathbf{J}(M)}{\partial z_1} dS_M.$$

Analogamente, posto $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ con $\mathbf{J}_1$ vettore armonico che sulla superficie σ assume il valore $\mathbf{J}_{\sigma}$, e con $\mathbf{J}_2$ tale che

$$(13) \quad \Delta_2 \mathbf{J}_2 = -\frac{2}{\eta} \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad (\text{in } S) \quad ; \quad \mathbf{J}_2 = 0, \quad (\text{su } \sigma),$$

si ha

$$(14) \quad \mathbf{J}(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{J}_{\sigma}(M)}{r_{PM}^3} d\sigma_M + \frac{1}{2\pi\eta} \int_S G(P, M) \frac{\partial \omega(M)}{\partial z_1} dS_M.$$

Si riconosce facilmente che le equazioni (12) e (14) si riducono a due equazioni integrali del tipo di Fredholm con nucleo uguale a $\partial G / \partial z_1$.

Sostituendo la (14) nella (12) si ottiene

$$(15) \quad \omega(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\omega_{\sigma}(M)}{r_{PM}^3} d\sigma_M + \frac{V_a^2}{8\pi k} \int_S G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \cdot \left\{ \frac{R^2 - \rho_1^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{J}_{\sigma}(Q)}{r_{MQ}^3} d\sigma_Q + \frac{1}{2\pi\eta} \int_S G(M, Q) \frac{\partial \omega(Q)}{\partial z_2} dS_Q \right\} dS_M$$

dove $Q(x_2, y_2, z_2)$ è un secondo punto variabile di integrazione.

Ora, essendo ψ una funzione qualsiasi del punto (scalare o vettoriale), si ha (2)

$$(16) \quad \int_S G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\int_S G(M, Q) \psi(Q) dS_Q \right] \cdot dS_M = \\ = 2\pi \int_S (z_1 - z) G(P, M) \psi(M) dS_M.$$

(2) Si osservi che entrambi i membri della (16) si annullano su σ , e che i loro Δ_2 sono uguali in S . Infatti, posto

$$u(P) = \frac{\partial}{\partial z} \int_S G(P, M) \psi(M) dS_M \quad , \quad w(P) = \int_S G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\int_S G(M, Q) \psi(Q) dS_Q \right] \cdot dS_M,$$

La (15) si può scrivere allora

$$(17) \quad \omega(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\omega_{\sigma}(M)}{r_{PM}^3} d\sigma_M + \frac{V_a^2}{8\pi k} \int_S G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \cdot \\ \cdot \left[\frac{R^2 - \rho_1^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{J}_{\sigma}(Q)}{r_{MQ}^3} d\sigma_Q \right] \cdot dS_M + \frac{V_a^2}{8\pi k \eta} \int_S (z_1 - z) G(P, M) \frac{\partial \omega(M)}{\partial z_1} dS_M.$$

Analogamente, sostituendo la (12) nella (14) si ha

$$(18) \quad \mathbf{J}(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{J}_{\sigma}(M)}{r_{PM}^3} d\sigma_M + \frac{I}{2\pi \eta} \int_S G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \cdot \\ \cdot \left[\frac{R^2 - \rho_1^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\omega_{\sigma}(Q)}{r_{MQ}^3} d\sigma_Q \right] dS_M + \frac{V_a^2}{8\pi k \eta} \int_S (z_1 - z) G(P, M) \frac{\partial \mathbf{J}(M)}{\partial z_1} dS_M.$$

Le (17) e (18) costituiscano due equazioni funzionali indipendenti che definiscano il vettore vortice ω e il vettore densità di corrente $\mathbf{J}$ in un punto interno alla sfera per mezzo dei valori comunque assegnati in superficie.

È opportuno osservare che una volta determinato il vortice ω mediante la (17), la corrente di conduzione $\mathbf{J}$ è fornita senz'altro dalla (14).

4. Se invece delle equazioni (6') consideriamo le equazioni

$$(19) \quad \Delta_2 \omega = - \frac{V_a^2}{2k} \xi \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial z}, \quad \Delta_2 \mathbf{J} = - \frac{2}{\eta} \xi \frac{\partial \omega}{\partial z},$$

si ha che w è la soluzione del sistema

$$\Delta_2 w = -4\pi u \equiv -4\pi \frac{\partial}{\partial z} \int_S G \psi dS, \quad (\text{in } S) \quad ; \quad w = 0, \quad (\text{sopra } \sigma),$$

cioè

$$\Delta_2 \int_S G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\int_S G(M, Q) \psi(Q) dS_Q \right] \cdot dS_M = -4\pi \frac{\partial}{\partial z} \int_S G \psi dS, \quad (\text{in } S), \\ \int_S G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\int_S G(M, Q) \psi(Q) dS_Q \right] dS_M = 0, \quad (\text{sopra } \sigma).$$

Si ha poi

$$\int_S (z_1 - z) G(P, M) \psi(M) dS_M = \int_S z_1 G \psi dS - z \int_S G \psi dS = 0, \quad (\text{sopra } \sigma),$$

e

$$\Delta_2 \int_S (z_1 - z) G \psi dS = \Delta_2 \int_S z_1 G \psi dS - \Delta_2 \left(z \int_S G \psi dS \right) = -4\pi z \psi - \left(2 \frac{\partial}{\partial z} \int_S G \psi dS - 4\pi z \psi \right) = \\ = -2 \frac{\partial}{\partial z} \int_S G \psi dS.$$

Dal confronto risulta l'asserto.

dove ξ è un parametro costante che poi porremo uguale a 1, con le condizioni $\omega = \omega_\sigma$ e $\mathbf{J} = \mathbf{J}_\sigma$, sopra la superficie σ , applicando il metodo delle approssimazioni successive poniamo

$$(20) \quad \begin{cases} \omega = \omega_0 + \xi \omega_1 + \xi^2 \omega_2 + \dots \\ \mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \xi \mathbf{J}_1 + \xi^2 \mathbf{J}_2 + \dots \end{cases}$$

Avremo allora

$$(21) \quad \begin{cases} \Delta_2 \omega_0 = 0, & (\text{in } S) & ; & \omega_0 = \omega_\sigma, & (\text{sopra } \sigma) \\ \Delta_2 \mathbf{J}_0 = 0, & (\text{in } S) & ; & \mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_\sigma, & (\text{sopra } \sigma) \end{cases}$$

$$(21') \quad \begin{cases} \Delta_2 \omega_i = -\frac{V_a^2}{2k} \frac{\partial \mathbf{J}_{i-1}}{\partial z}, & (\text{in } S) & ; & \omega_i = 0, & (\text{sopra } \sigma) \\ \Delta_2 \mathbf{J}_i = -\frac{2}{\eta} \frac{\partial \omega_{i-1}}{\partial z}, & (\text{in } S) & ; & \mathbf{J}_i = 0, & (\text{sopra } \sigma), \quad (i=1, 2, 3, \dots). \end{cases}$$

I vettori armonici $\omega_0, \mathbf{J}_0$ si ottengono applicando la formula di Poisson e si ha

$$(22) \quad \begin{cases} \omega_0(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\omega_\sigma(M)}{r_{PM}^3} d\sigma_M \\ \mathbf{J}_0(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{J}_\sigma(M)}{r_{PM}^3} d\sigma_M, \end{cases}$$

mentre i vettori $\omega_i, \mathbf{J}_i$ sono dati successivamente dalle formule ricorrenti

$$(23) \quad \begin{cases} \omega_i(P) = \frac{V_a^2}{8\pi k} \int_S G(P, M) \frac{\partial \mathbf{J}_{i-1}(M)}{\partial z_1} dS_M \\ \mathbf{J}_i(P) = \frac{1}{2\pi\eta} \int_{\sigma} G(P, M) \frac{\partial \omega_{i-1}}{\partial z_1} dS_M, \quad (i=1, 2, 3, \dots). \end{cases}$$

I vettori ω_0 e $\mathbf{J}_0$ sono finiti in S colle loro derivate successive. Se poi supponiamo che i vettori assegnati $\omega_\sigma, \mathbf{J}_\sigma$, abbiano derivate del 1° ordine finite e continue, allora si può vedere che i vettori $\omega_0, \mathbf{J}_0$ sono finiti colle loro derivate parziali prime anche nei punti della superficie σ , e queste non sorpassano in valore assoluto certi valori limiti (3).

Col noto procedimento di Picard si dimostra allora che la serie (20), e quelle che si deducono prendendo le derivate fino al 2° ordine, sono assolutamente ed uniformemente convergenti per $\xi = 1$, se è soddisfatta la condizione

$$(24) \quad R^2 \cdot \frac{V_a^2}{k\eta} < 1.$$

(3) Cfr. HADAMARD, *Sur l'équilibre des plaques élastiques, etc.* § 8, «Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure de Paris», 3^e série, t. XVIII, 1901.

In questo caso le serie (20), per $\xi = 1$, forniscono i vettori ω e $\mathbf{J}$ soddisfacenti alle equazioni (6') e che sulla superficie della sfera assumono i valori assegnati.

La condizione (24) richiede che il coefficiente di viscosità k sia sufficientemente grande e così pure il coefficiente di diffusività magnetica $\eta = 1/(\mu\sigma)$, che cioè sia sufficientemente piccola la conduttività elettrica σ .

Se supponiamo che il coefficiente $1/(k\eta) = \mu\sigma/k$, sia tanto piccolo da poter trascurare i termini in $1/(k^2\eta)$, e $1/(k\eta^2)$, e quelli di ordine superiore, dalle equazioni funzionali (17) e (18) si deducono le relazioni

$$(25) \quad \omega(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\omega_{\sigma}(M)}{r_{PM}^3} d\sigma_M + \frac{V_a^2}{8\pi k} \int_{\xi} G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{R^2 - \rho_1^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{J}_{\sigma}(Q)}{r_{MQ}^3} d\sigma_Q \right] \cdot dS_M +$$

$$+ \frac{V_a^2}{8\pi k\eta} \int_{\xi} (z_1 - z) G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{R^2 - \rho_1^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\omega_{\sigma}(Q)}{r_{MQ}^3} d\sigma_Q \right] \cdot dS_M,$$

$$(26) \quad \mathbf{J}(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{J}_{\sigma}(M)}{r_{PM}^3} d\sigma_M + \frac{1}{2\pi\eta} \int_{\xi} G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{R^2 - \rho_1^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\omega_{\sigma}(Q)}{r_{MQ}^3} d\sigma_Q \right] \cdot dS_M +$$

$$+ \frac{V_a^2}{8\pi k\eta} \int_{\xi} (z_1 - z) G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{R^2 - \rho_1^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{J}_{\sigma}(Q)}{r_{MP}^3} d\sigma_Q \right] \cdot dS_M,$$

che forniscono in termini finiti i valori del vortice ω e della densità di corrente di conduzione $\mathbf{J}$ in ogni punto P interno alla sfera per mezzo dei valori assegnati in superficie.

Nel caso particolare in cui l'involucro sferico in cui è contenuto il liquido viscoso, conduttore, si muove con velocità di traslazione uniforme $\mathbf{V}_0$ e con velocità angolare di rotazione costante $\boldsymbol{\Omega}_0$, poiché il liquido bagna le pareti dell'involucro in superficie deve essere $\mathbf{v} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\Omega}_0 \wedge (P - O)$, e quindi

$$\omega_{\sigma} = \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{v})_{\sigma} = \boldsymbol{\Omega}_0 \quad (\text{vettore costante}).$$

In tal caso le formule (25) e (26) diventano più semplicemente

$$(27) \quad \omega(P) = \boldsymbol{\Omega}_0 + \frac{V_a^2}{8\pi k} \int_{\xi} G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \left[\frac{R^2 - \rho_1^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{J}_{\sigma}(Q)}{r_{MQ}^3} d\sigma_Q \right] \cdot dS_M,$$

$$(28) \quad \mathbf{J}(P) = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{J}_{\sigma}(M)}{r_{PM}^3} d\sigma_M + \frac{V_a^2}{8\pi k\eta} \int_{\xi} (z_1 - z) G(P, M) \frac{\partial}{\partial z_1} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{R^2 - \rho_1^2}{4\pi R} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{J}_{\sigma}(Q)}{r_{MQ}^3} d\sigma_Q \right] \cdot dS_M,$$

da cui risulta che nel caso considerato la corrente di conduzione è indipendente dalla rotazione uniforme della massa fluida.

SUMMARY. — The question which relate a slow steady motion of a viscid and electrical conducting fluid, in a moving spherical rigid envelope, which is plunged in a uniform magnetic field, has particular interest for the study of the inner magnetism of the earth.

In this first paper the author considers the stationary magnetohydrodynamic equations in the case of small velocity and weak inducted magnetic field, and meanwhile he shows that the vortex vector and the conductive current verify a some differential equation of the fourth order.

After the author attends to determine the vortex vector and the conductive current in a point within the sphere when theirs values are however assigned on the surface.