
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

MAURO PICONE

Sulla matrice risolvante di un sistema normale di equazioni differenziali lineari ordinarie con la variabile indipendente complessa. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 38 (1965), n.3, p. 289–295.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_3_289_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 marzo 1965

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Sulla matrice risolvente di un sistema normale di equazioni differenziali lineari ordinarie con la variabile indipendente complessa.* Nota II (*) del Socio MAURO PICONE.

Con questa seconda Nota, dedicata allo stesso argomento trattato nella prima ⁽¹⁾, mi propongo di considerare tre esempi particolari, col primo dei quali confermo, per altra via, le tesi dei teoremi dati nella prima Nota e col secondo e col terzo misuro la potenza dei mezzi di ricerca forniti da quei teoremi nei problemi d'integrazione, in campi più volte connessi, dei sistemi normali di equazioni differenziali lineari ordinarie, con la variabile indipendente complessa. Nella presente seconda Nota faccio uso degli stessi simboli adoperati nella prima, la quale sarà citata con la notazione (N I).

1. Primo esempio. — Considerando, come primo esempio, il particolarissimo caso $p = 1$ e l'equazione differenziale, nella funzione complessa $u(z)$:

$$(1.1) \quad \frac{du}{dz} - \frac{\gamma}{z} u = f(z),$$

essendo γ un'assegnata costante complessa, A il luogo dei punti del piano complesso z , per cui:

$$(1.2) \quad \lambda < |z| < \Lambda \quad (\lambda \geq 0, \Lambda \leq +\infty),$$

(*) Presentata nella seduta del 13 febbraio 1965.

(1) Questi « Rendiconti », vol. XXXVIII della Serie VIII, fasc. 2 (Febbraio 1965).

avendosi, ivi, con le f_k costanti,

$$(1.3) \quad f(z) \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k z^k,$$

e

$$\frac{1}{\Lambda} = \lim''_{k \rightarrow +\infty} |f_k|^{1/k}, \quad \lambda = \lim''_{k \rightarrow +\infty} |f_{-k}|^{1/k},$$

un'eventuale soluzione della (1.1), olomorfa in A, avrà ivi lo sviluppo in serie, a coefficienti u_k costanti.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k z^k,$$

e l'equazione (1.1) si traduce nelle seguenti, in tali coefficienti,

$$(1.4) \quad (k+1-\gamma) u_{k+1} = f_k \quad (k = \dots, -1, 0, 1, \dots).$$

Pertanto, se γ non è un numero intero, se, cioè, l'equazione omogenea $(1.1)_0$ ha soltanto lo zero come sua soluzione olomorfa in A, esiste ivi, in accordo col teorema VII di (N I) una ed una sola soluzione della (1.1), olomorfa in A, poiché, con le u_k date dalle (1.4), si ha:

$$(1.5) \quad \lim''_{k \rightarrow +\infty} |u_k|^{1/k} = \lim''_{k \rightarrow +\infty} |f_k|^{1/k}, \quad \lim''_{k \rightarrow +\infty} |u_{-k}|^{1/k} = \lim''_{k \rightarrow +\infty} |f_{-k}|^{1/k}.$$

Se γ è l'intero $n+1$, esistono soluzioni della (1.1), olomorfe in A, quando e solo quando risulti:

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) z^{-(n+1)} dz = 0,$$

designando Γ una qualsivoglia curva regolare, semplice e chiusa, tracciata in A, contenente nel suo interno, il continuo $|z| \leq \lambda$, poiché le (1.4) sono allora compatibili e, lasciando esse il coefficiente u_{n+1} indeterminato, determinano tutti gli altri, verificanti le (1.5). In accordo col teorema X di (N I), poiché, per $\gamma = n+1$, l'equazione omogenea $(1.1)_0$ ha tutte le sue soluzioni olomorfe in A e $cz^{-(n+1)}$, con c costante arbitraria, è una qualsivoglia soluzione dell'equazione a quella aggiunta. Ancora in accordo col citato teorema X, l'equazione (1.1) ha, allora, tutte le sue soluzioni olomorfe in A, date, con u_0 costante arbitraria e il punto z_0 arbitrariamente fissato in A, dalla formula:

$$u(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n+1} u_0 + \int_{z_0}^z \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n+1} f(\zeta) d\zeta,$$

l'integrazione essendo effettuata lungo una curva regolare di A, in particolare poligonale coordinata, congiungente i punti z_0 e z .

2. **Secondo esempio.** — Come secondo esempio, consideriamo l'equazione differenziale, nella funzione complessa $u(z)$:

$$(2.1) \quad \frac{du}{dz} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} \right) u = f(z),$$

per la quale il campo A'' sia tutto il piano complesso, il campo A questo piano privato dei punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$, il campo A' il piano stesso privato dei punti $(x, 0)$, con $x < 1$. I tagli si riducono a due T_1 e T_2 , essendo

il taglio T_1 , l'intervallo aperto $0 < x < 1, y = 0$,

e il taglio T_2 , l'intervallo aperto $x < 0, y = 0$.

La matrice risolvente dell'equazione è data, nel campo $A' \times A'$, dalla funzione

$$(2.2) \quad r(z, \zeta) = \frac{\sqrt{z} \sqrt{z-1}}{\sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta-1}},$$

avendo assunto, per ciascuno dei quattro radicali scritti, la sua determinazione principale ⁽²⁾. Scelti, ad arbitrio, sul taglio T_1 , il punto $z_1 = x_1$, con $0 < x_1 < 1$, e, sul taglio T_2 , il punto $z_2 = x_2$, con $x_2 < 0$, si ha, per ogni punto ζ del campo A' ,

$$r^+(z_1, \zeta) = \frac{i \sqrt{x_1 - x_1^2}}{\sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta-1}}, \quad r^-(z_1, \zeta) = \frac{-i \sqrt{x_1 - x_1^2}}{\sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta-1}},$$

$$r^+(z_2, \zeta) = \frac{-\sqrt{x_2^2 - x_2}}{\sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta-1}}, \quad r^-(z_2, \zeta) = \frac{-\sqrt{x_2^2 - x_2}}{\sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta-1}},$$

e pertanto, indicata con $\hat{u}$ l'incognita complessa, valore della $u(z)$, prescrittore in un arbitrario fissato punto z_0 di A' , le equazioni (3.6) di (N I) si riducono alle due seguenti

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{2 \hat{u}}{\sqrt{z_0} \sqrt{z_0-1}} + (\Pi^+) \int_{z_0}^{z_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta-1}} + (\Pi^-) \int_{z_0}^{z_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta-1}} = 0, \\ (\Pi^+) \int_{z_0}^{z_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta-1}} - (\Pi^-) \int_{z_0}^{z_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta-1}} = 0. \end{cases}$$

(2) Essendo z e γ due numeri complessi, con $z \neq 0$, come *determinazione principale* della potenza z^γ intendo quella data dall'esponenziale:

$$e^{\gamma(\log |z| + i \arg z)},$$

designando $\arg z$ l'argomento di z verificante la limitazione $-\pi < \arg z \leq \pi$ [cfr. PICONE e FICHERA, *Trattato di Analisi Matematica*, vol. I, p. 431 (Tuminelli, Roma, 1951)].

La seconda di queste dà una condizione necessaria per l'esistenza della ricercata soluzione dell'equazione (2.1) a norma della quale deve aversi:

$$(2.4) \quad \int_{\Pi} \frac{f(z) dz}{\sqrt{z} \sqrt{z-1}} = 0,$$

per ogni poligonale coordinata chiusa Π , tracciata nel campo B, ottenuto dal piano complesso privandolo dei punti del segmento $0 \leq x \leq 1, y = 0$, ciò che, del resto, subito si ottiene dall'equazione (2.1), supposta soddisfatta da una funzione $u(z)$, olomorfa in A, anche sostituendo alla poligonale coordinata chiusa Π , una qualsivoglia curva regolare chiusa, pur essa del campo B. La prima delle equazioni (2.3) determina l'incognita $\hat{u}$ e si ha dunque il risultato:

Condizione necessaria affinché l'equazione (2.1) possieda una soluzione olomorfa nel considerato campo A è che, per ogni curva regolare chiusa Γ , tracciata nel campo B, si abbia

$$(2.5) \quad \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{\sqrt{z} \sqrt{z-1}} = 0,$$

condizione sufficiente è che si verifichi la (2.4) per ogni poligonale coordinata chiusa Π , di B. Soddisfatta questa condizione, esiste una sola soluzione della (2.1), olomorfa in A, e vi è rappresentata dalla (3.3) di (N I), con la $r(z, \zeta)$ data dalla (2.2) e la quantità complessa $\hat{u}$ dalla prima delle (2.3).

Si osservi che il fattore $1/(\sqrt{z} \sqrt{z-1})$ del prodotto sotto il segno dell'integrale ai primi membri delle (2.4) e (2.5) è soluzione, olomorfa nel campo B, dell'equazione omogenea aggiunta alla (2.1).

È utile notare che la prima delle (2.3) rappresenta, essa stessa, nel campo A' , la soluzione della (2.1), olomorfa in A, poiché, essendo z_0 un punto qualsivoglia di A' , si ottiene, da essa, sostituendovi z_0 con z , il risultato:

La soluzione $u(z)$ della (2.1), olomorfa in A, è rappresentata, in A' , dalla formola:

$$(2.6) \quad u(z) = (\Pi^+) \int_{z_1}^z \frac{\sqrt{z} \sqrt{z-1}}{2 \sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta-1}} f(\zeta) d\zeta + (\Pi^-) \int_{z_1}^z \frac{\sqrt{z} \sqrt{z-1}}{2 \sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta-1}} f(\zeta) d\zeta,$$

ove z_1 è un qualsivoglia punto del taglio T_1 .

Se si tien conto della condizione (2.5), supposta verificata dalla $f(z)$, subito si vede che la (2.6) rappresenta $u(z)$ in tutto il campo B, consentendo alle poligonali Π^+ e Π^- di uscire dal campo A' , ma non di attraversare la frontiera di B.

Siano $\Gamma_0(\lambda)$ e $\Gamma_1(\lambda)$ due circonferenze di raggio λ minore di 1, aventi i centri, la prima nel punto (0, 0) e la seconda nel punto (1, 0). Per il calcolo di $u(z)$ in un punto di $\Gamma_0(\lambda)$, distinto dal punto $(\lambda, 0)$, si può sostituire nella (2.6), alla poligonale Π^+ , l'arco di $\Gamma_0(\lambda)$ percorso nel verso antiorario, con origine nel punto $(\lambda, 0)$ e termine nel punto z e alla poligonale Π^- l'arco di $\Gamma_0(\lambda)$,

percorso nel senso orario, avente per origine e termine quelli del precedente, mentre si ha:

$$(2.7) \quad u(\lambda) = \int_{-\Gamma_0(\lambda)} \frac{\sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda-1}}{2\sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta-1}} f(\zeta) d\zeta,$$

avendo indicato col simbolo

$$\int_{-\Gamma_0(\lambda)} (\dots) d\zeta,$$

un integrale esteso alla circonferenza $\Gamma_0(\lambda)$ nel verso orario. Per il calcolo di $u(z)$ in un punto di $\Gamma_1(\lambda)$, distinto dal punto $(1-\lambda, 0)$, si può sostituire, nella (2.6), alla poligonale Π^+ l'arco di $\Gamma_1(\lambda)$, percorso nel verso orario, con origine nel punto $(1-\lambda, 0)$ e termine nel punto z , e alla poligonale Π^- l'arco di $\Gamma_1(\lambda)$, percorso nel verso antiorario, con origine e termine del precedente, mentre si ha:

$$(2.8) \quad u(1-\lambda) = \int_{+\Gamma_1(\lambda)} \frac{\sqrt{1-\lambda} \sqrt{-\lambda}}{2\sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta-1}} f(\zeta) d\zeta,$$

avendo indicato col simbolo

$$\int_{+\Gamma_1(\lambda)} (\dots) d\zeta,$$

un integrale esteso alla circonferenza $\Gamma_1(\lambda)$ nel verso antiorario ⁽³⁾.

Dalle (2.7) e (2.8), detti $M_0(\lambda)$ e $M_1(\lambda)$ i massimi di $|f(z)|$, rispettivamente, sulle circonferenze $\Gamma_0(\lambda)$ e $\Gamma_1(\lambda)$, subito si deduce che:

$$\begin{cases} \text{su } \Gamma_0(\lambda) & , & |u(z)| \leq 2\pi M_0(\lambda) \lambda \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}, \\ \text{su } \Gamma_1(\lambda) & , & |u(z)| \leq 2\pi M_1(\lambda) \lambda \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}, \end{cases}$$

e pertanto che:

La soluzione $u(z)$ della (2.1), olomorfa in A , ha nel punto $(0,0)$ o nel punto $(0,1)$ un polo d'ordine non superiore a $n-1$ se la funzione $f(z)$ ha in quel punto un polo d'ordine non superiore a n , ha un punto ordinario se la $f(z)$ ha in quel punto un polo d'ordine non superiore a uno; ha uno zero se la $f(z)$ vi è ordinaria, è funzione intera, nulla nei punti $(0,0)$ e $(0,1)$, se la $f(z)$ è funzione intera, ecc.

(3) Se nella (2.8) si sostituisce λ con $1-\lambda$ si trova per $u(\lambda)$, insieme alla (2.7) anche l'espressione

$$u(\lambda) = \int_{+\Gamma_1(1-\lambda)} \frac{\sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda-1}}{2\sqrt{\zeta} \sqrt{\zeta-1}} f(\zeta) d\zeta,$$

che dà alla $u(\lambda)$ il valore delle (2.7), in virtù delle (2.5), supposta soddisfatta.

Quanto alla condizione (2.5), se si osserva che, per una circonferenza $\Gamma(\lambda)$ con centro nel punto $(0, 0)$ e raggio $\lambda \geq 2$, si ha:

$$\left| \int_{\Gamma(\lambda)} \frac{f(z) dz}{\sqrt{z} \sqrt{z-1}} \right| \leq 2\pi \sqrt{2} M(\lambda),$$

avendo indicato con $M(\lambda)$ il massimo di $|f(z)|$ su $\Gamma(\lambda)$, possiamo dire che:

La condizione (2.5) è soddisfatta se la $f(z)$ è infinitesima all'infinito.

Ma, in generale, la funzione $f(z)$, olomorfa nel campo A, vi ammette lo sviluppo in serie

$$(2.9) \quad f(z) = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k z^k + \frac{f'_k}{z^k} + \frac{f''_k}{(z-1)^k} \right],$$

con f_k, f'_k, f''_k costanti, per le quali

$$(2.10) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |f_k|^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} |f'_k|^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} |f''_k|^{1/k} = 0,$$

e, per qualsivoglia curva Γ regolare semplice e chiusa, tracciata nel campo B, percorsa nel verso antiorario, risulta:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\Gamma} \frac{f(z) dz}{\sqrt{z} \sqrt{z-1}} = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} f_k,$$

avendo, per ogni numero naturale n , indicato con $n!!$ il prodotto di tutti i numeri naturali non superiori ad n , aventi la sua stessa parità. Si ha dunque che:

La più generale funzione $f(z)$, olomorfa nel campo A, soddisfacente la condizione (2.5) è data dallo sviluppo in serie (2.9), con le costanti f_k, f'_k, f''_k verificanti le (2.10) e la

$$(2.11) \quad f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} f_k = 0.$$

Anche la ricercata soluzione $u(z)$ della (2.1) avrà uno sviluppo in serie del tipo:

$$(2.12) \quad u(z) = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[u_k z^k + \frac{u'_k}{z^k} + \frac{u''_k}{(z-1)^k} \right],$$

con u_k, u'_k, u''_k costanti, per le quali

$$(2.13) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |u_k|^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} |u'_k|^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} |u''_k|^{1/k} = 0,$$

e si potrebbero riottenere tutti i risultati dell'attuale esempio, introducendo gli sviluppi (2.9) e (2.12) nell'equazione (2.1) e, analogamente a quanto è stato fatto nel primo esempio, cercando di soddisfare l'equazione eguagliando i coefficienti dei termini simili degli sviluppi dei suoi due membri. Per tale ricerca, si richiede un calcolo non semplicissimo, ovviamente eseguibile, ma le cui complicazioni sono tali da fare bene apprezzare la potenza del metodo generale esposto al n. 3 di (N I).

Tuttavia, nel caso particolare in cui $f(z)$ è un polinomio di grado n :

$$(2.14) \quad f(z) = \sum_{k=1}^n f_k z^k,$$

per i cui coefficienti si ha:

$$(2.15) \quad f_0 + \sum_{k=0}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} f_k = 0,$$

col detto calcolo, si ottiene rapidamente il risultato, non occorre dirlo, subito deducibile anche dalla formola (2.6):

Se $f(z)$ è un polinomio di grado $n > 0$, i cui coefficienti verificano la (2.15), la soluzione della (2.1), olomorfa nel campo A , è un polinomio di grado $n+1$, nullo nei punti $(0, 0)$ e $(0, 1)$.

3. Terzo esempio. — Il campo A sia il luogo dei punti del piano complesso z che verificano la (1.2) e la $f(z)$ sia definita, in A dalla (1.3). Si ha, allora, per quanto è stato osservato al n° 4 di (N I), che, condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione differenziale

$$(3.1) \quad \frac{d^2 u}{dz^2} + u = f(z),$$

abbia soluzioni olomorfe in A , è che risulti:

$$(3.2) \quad \int_{\Pi} f(z) \operatorname{sen} z \, dz = \int_{\Pi} f(z) \cos z \, dz = 0,$$

per ogni poligonale coordinata chiusa Π di A e, soddisfatta questa condizione, tutte le soluzioni della (3.1), olomorfe in A , sono date dalla formola:

$$u(z) = \hat{u} \cos(z - z_0) + \hat{u}' \operatorname{sen}(z - z_0) + \int_{z_0}^z \operatorname{sen}(z - \zeta) f(\zeta) \, d\zeta,$$

ove $\hat{u}$ e $\hat{u}'$ sono costanti arbitrarie, z_0 è un punto arbitrariamente scelto in A e l'integrazione è effettuata lungo una curva regolare, in particolare poligonale, tracciata in A , terminata ai punti z_0 e z .

Questo risultato potrebbe, ovviamente, anche ottenersi direttamente, senza far ricorso ai risultati del n. 4 di (N I), purchè si sia disposti ad affrontare talune complicazioni di calcolo, introducendo lo sviluppo in serie (1.3) di $f(z)$ e lo sviluppo

$$u(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k z^k,$$

della $u(z)$, nella (3.1) e nella equazioni $u(z_0) = \hat{u}$, $[du/dz]_{z=z_0} = \hat{u}'$, tenendo conto delle (1.5) e che le condizioni (3.2) equivalgono alle eguaglianze

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{-2k-1}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{-2k-2}}{(2k+1)!} = 0,$$

che devono essere verificate dai coefficienti dello sviluppo (1.3).