
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

CARLO CASTAGNOLI, ANGELO DE MARCO, RENATO
SCRIMAGLIO

Perdita di energia di muoni ultrarelativistici. - III. Relazione percorso-energia in acqua e roccia

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 38 (1965), n.2, p. 201–206.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_2_201_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fisica. — *Perdita di energia di muoni ultrarelativistici.* — III. *Relazione percorso-energia in acqua e roccia.* Nota di CARLO CASTAGNOLI, ANGELO DE MARCO e RENATO SCRIMAGLIO, presentata (*) dal Socio G. WATAGHIN.

I. INTRODUZIONE. — In questa Nota calcoliamo la relazione percorso-energia $R(E)$ per muoni ultrarelativistici in un mezzo condensato (caratterizzato da Z, A, ρ) sulla base della valutazione delle perdite di energia $(dE/dx)_{\text{coppie}}$, $(dE/dx)_{\text{nucl.}}$ discussa nelle due precedenti Note [1] e della (dE/dx) per collisione che verrà qui esaminata.

Considereremo i due casi dell'acqua e della roccia; mentre per quest'ultima esistono numerose misure [2] di intensità-profondità effettuate sulla componente muonica di alta energia, solo molto recentemente si sono effettuate misure a grandi profondità sottomarine [3]. I vari valori di Z^2/A e Z/A utilizzati nei nostri calcoli sono dati in Tabella I: per la roccia essi corrispondono alle caratteristiche della copertura delle due stazioni (Kolar Mine e Monte Bianco) che hanno ospitato le più recenti misure alle massime profondità. I risultati relativi alla roccia standard sono stati pubblicati altrove [4]. Nell'ultimo paragrafo prendiamo in considerazione l'ipotesi che la σ_v per effetto fotonucleare non sia costante come si è supposto in I e vediamo come ciò si ripercuote sulla $R(E)$. Prendiamo dapprima in esame i vari processi di perdita di energia.

TABELLA I.

	$\langle Z \rangle$	$\langle A \rangle$	$\langle Z/A \rangle$	$\langle Z^2/A \rangle$	ρ (g/cm ³)	Riferimenti Bibliografici
Roccia standard	12	24	0,50	6	2,6	[5]
Monte Bianco	10,3	20,9	0,494	5,11	2,6	[6]
Kolar Gold Mine	12,8	25,9	0,494	6,3	3,2	[7]
Acqua	6,85	12,38	0,555	3,76	1,0	[5]

2. PERDITA DI ENERGIA PER COLLISIONE $(dE/dx)_{\text{col.}}$. — La $(dE/dx)_{\text{col.}}$ viene calcolata con la formula di Bethe-Livingstone, includendovi l'effetto di densità alla Fermi, nella forma data da Sternheimer [8]. Scriveremo:

$$(1) \quad \left(-\frac{dE}{dx} \right)_{\text{col.}} = \frac{A}{\beta^2} \left\{ B + \ln T(p\epsilon^2) - 2\beta^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{T}{E + \mu\epsilon^2} \right)^2 - \delta \right\}$$

(*) Nella seduta del 13 febbraio 1965.

con

$$A = \frac{2\hbar N \cdot Z}{A} r_e^2 m c^2 \quad ; \quad B = \ln \frac{m c^2 (10^6 \text{ ev})}{I^2},$$

$$\delta = \begin{cases} 4.606 x + C + a(x - x_1)_m, & x_0 < x \leq x_1 \\ 4.606 x + C, & C = -2 \ln I/\hbar v_p - 1 \quad ; \quad x = \lg \frac{p}{\mu c} \end{cases}$$

In questi tre coefficienti compare una dipendenza da Z , ma con diversa importanza. In A tale dipendenza è lineare; in B compare sotto logaritmo nel potenziale medio di ionizzazione I . Se si scrive $I = \text{cost. } Z$ e posto $I = I_0 \pm \Delta I$ si ha che $\ln I/I_0 \sim \Delta Z/Z_0$, cioè la variazione apportata dal termine logaritmico è pari alla variazione percentuale della Z . Quindi la variazione del termine B (essendo di $\sim 10^{-3}$) è trascurabile rispetto a quella di A e di δ (che è sempre $\sim 10^{-2}$).

Nella (1) si può poi introdurre il termine correttivo dovuto all'effetto di soppressione [9]. Il valore di saturazione Δ_∞ di tale correzione che si raggiunge per energie $E/\mu c > 1$, è

$$(2) \quad \Delta_\infty = 2 \ln^2 \xi = 2 \ln^2 \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\sqrt{4\pi\rho Z}}{mA} \frac{c}{\langle \omega_s \rangle} \ln \frac{c}{v} = 2 \ln^2 \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\omega_0}{\langle \omega_s \rangle} \ln \frac{c}{\langle v \rangle}$$

ove: ω_0 = frequenza di plasma del mezzo considerato; $\langle \omega_s \rangle$ = frequenza effettiva media degli elettroni atomici; $\langle v \rangle$ = velocità media degli elettroni atomici.

Per il calcolo di ω_0 ricordiamo che

$$(3) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\hbar} v_p = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{ne^2}{\pi m} \right)^{1/2}$$

e che i valori di v_p si possono trovare in apposite tabelle [8].

Per il calcolo di $\langle v \rangle$ assumiamo un modello a n shell per cui

$$(4) \quad \langle v \rangle = c \frac{Z}{137} \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle.$$

Nel caso dell'acqua si può supporre che l'orbita molecolare degli elettroni più esterni sia molto più grande della distanza tra il nucleo di Ossigeno e quello H e quindi si può mediare $\langle v \rangle$ come si è fatto per gli altri materiali.

Ricordiamo infine [8] che

$$\langle \omega_s \rangle = \hbar^{-1} \sum_i^n f_i \ln \hbar \omega_i$$

ove n = numero degli strati; f_i = oscillator strength dei vari strati ed $\hbar \omega_i$ è il potenziale di ionizzazione per i singoli strati.

Si ottengono così valori dati in Tabella II.

TABELLA II.

	ω^0	ω_s	$\langle v/c \rangle$	ξ	E	$\Delta\infty$
Roccia standard	5,18 10^{16}	1,14 10^{17}	4,00 10^{-2}	9,80 10^{-3}	1,10 10^4	-1,00 10^{-1}
Monte Bianco	4,95 10^{16}	1,60 10^{17}	2,17 10^{-2}	8,64 10^{-3}	1,16 10^4	-1,03 10^{-1}
Kolar Mine	5,35 10^{16}	1,21 10^{17}	3,95 10^{-2}	9,30 10^{-3}	1,12 10^4	-1,01 10^{-1}
Acqua	3,18 10^{16}	1,14 10^{17}	3,80 10^{-2}	6,61 10^{-3}	1,51 10^4	-1,12 10^{-1}

3. LA PERDITA DI ENERGIA TOTALE E LA RELAZIONE PERCORSO-ENERGIA. — Prendiamo ora in esame gli altri contributi alla perdita totale di energia. Quello dovuto alla radiazione si può scrivere, secondo i risultati di Rozenthal e Streltov [10] dedotti dalla sezione d'urto di Chrysty-Kusaka, nella forma:

$$(5) \quad -\langle dE/dx \rangle_{br} = \frac{Z^2}{A} B \begin{cases} E \left[\ln \frac{E}{\mu c} - B(Z) \right] & (\text{senza schermo}) \\ E & (\text{con schermo}) \end{cases}$$

ove

$$B = 4 \alpha \cdot N r_e^2 \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right)^2.$$

Le due espressioni si raccordano ad un valore $E \sim 10^4 Z^{-1/3}$. La $B(Z)$ è una funzione lentamente variabile di Z , e pertanto le variazioni maggiori provengono dal fattore Z^2/A .

La $\langle dE/dx \rangle$ per creazione di coppie si può scrivere nella forma

$$(6) \quad -\langle dE/dx \rangle_c = \frac{2Z^2}{A} C f(E) \quad \text{ove} \quad C = \frac{N}{\pi} \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right)^2 \alpha^2 r_e^2,$$

ove per $f(E)$ valgono le considerazioni fatte nel precedente lavoro II.

La perdita di energia per effetti nucleari è stata calcolata in I nell'ipotesi di una σ_v costante. Questo termine non risulta toccato da un cambiamento in Z , ed A . Sarà:

$$(7) \quad -\left(\frac{dE}{dx} \right)_n = \frac{2 \alpha N}{\pi} g(E).$$

La relazione percorso energia è espressa dalla formula

$$(8) \quad R(E) = \int_0^{10^8} \left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{tot}}^{-1} dE + \int_{10^8}^E \left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{tot}}^{-1} dE = 545 + \int_{10^8}^E \left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{tot}}^{-1} dE \text{ gr/cm}^2$$

ove la $(dE/dx)_{\text{tot}}$ è data dalla somma delle espressioni (1), (5), (6), (7), e dove l'integrale è stato diviso in due parti di cui la prima (per $E < 10^3$ MeV) è stata calcolata con grande precisione da Sternheimer [8].

TABELLA III.

a (MeV g ⁻¹ cm ²)	b	c (MeV g ⁻¹ cm ²)	AUTORI	Riferimenti Bibliografici
1,88	$2,3 \times 10^{-6}$	$7,66 \times 10^{-2}$	Ozaki	[12]
1,88	$4,0 \times 10^{-6}$	$7,77 \times 10^{-2}$	Hayman	[13]
1,88	$3,2 \times 10^{-6}$	$7,77 \times 10^{-2}$	Wolfendale	[14]
1,84	$3,9 \times 10^{-6}$	$7,66 \times 10^{-2}$	Miyake	[7]
1,73	$3,45 \times 10^{-6}$	$8,23 \times 10^{-2}$	presente lavoro	

Utilizzando le formule precedentemente discusse si è ottenuto dalla (8) la Tabella IV. In essa per ogni valore di Z/A si danno i valori $R(E)$ tenendo conto dell'effetto di soppressione, e della teoria di Kessler-Kessler o di Weizsäcker-Williams per gli effetti nucleari.

Si può osservare che la $(dE/dx)_{\text{tot}}$ è esprimibile nella forma

$$(9) \quad \left(\frac{dx}{dE}\right)_{\text{tot}} = a + bE + c \ln\left(\frac{E}{10^3 \mu c^2}\right) \quad (\text{per } E > 10^4 \text{ MeV}),$$

e che quindi con buona approssimazione la $R(E)$ può essere data dalla

$$(10) \quad E = \frac{A}{b} (e^{bx} - 1) \quad \text{con} \quad A = a + c \ln \frac{E}{\mu c^2}.$$

I corrispondenti valori a , b , c ottenuti da noi e dagli altri Autori sono dati in Tabella III.

4. LA $R(E)$ NEL CASO DI σ_γ VARIABILE CON E . - Vogliamo ora osservare che l'ipotesi fondamentale sotto la quale è stata calcolata la (7) in (I), e cioè la $(dE/dx)_{\text{nuc.}}$, risulta suffragata da altri recenti risultati sperimentali. Tale ipotesi infatti consiste nell'ammettere che la σ_γ per effetto fotonucleare resti praticamente costante per energie $> 1,1$ GeV: ed i risultati ottenuti da Y. Eisenberg et al. [11] mostrano appunto ciò fino ad energie di 4,1 GeV. L'estrapolazione ad energie di 10^4 - 10^5 GeV è però rischiosa: può sembrare prudente perciò prendere in considerazione il caso di una σ_γ decrescente con l'energia E_γ del fotone. Abbiamo perciò calcolato la $(dE/dx)_{\text{nuc.}}$ nei due casi:

$$(11) \quad \sigma_\gamma \sim E_\gamma^{-\alpha} \quad ; \quad \sigma_\gamma \sim (\lg E_\gamma)^{-1}$$

e abbiamo scelto i valori $\alpha = 1$; $\alpha = 0,2$.

TABELLA IV.

E (MeV)	H ₂ O (gr/cm ²)		Monte Bianco (gr/cm ²)		Kolar Mine (gr/cm ²)	
	K. K.	W. W.	K. K.	W. W.	K. K.	W. W.
10 ³	545	545	545	545	545	545
6·10 ³	2.293	2.296	2.560	2.563	2.574	2.577
10 ⁴	3.969	3.978	4.483	4.495	4.501	4.513
6·10 ⁴	2.252	2.305	2.548	2.652	2.524	2.591
10 ⁵	3.559	3.711	3.989	4.215	3.941	4.126
6·10 ⁵	1.396	1.735	1.479	1.846	1.438	1.770
10 ⁶	1.872	2.539	1.948	2.618	1.882	2.483
6·10 ⁶	3.821	6.948	3.802	6.544	3.636	5.973
10 ⁷	4.385	8.545	4.332	7.893	4.135	7.147
6·10 ⁷	6.263	1.455	6.088	1.294	5.809	1.151
10 ⁸	6.759	1.644	6.555	1.441	6.254	1.277

TABELLA V.

E (MeV)	Range (gr/cm ²) Teoria Kessler-Kessler			Range (gr/cm ²) Teoria Weizsäcker-Williams		
	$\alpha = 1$	$(\lg E\gamma)^{-1}$		$\alpha = 1$	$\alpha = 0,2$	
		$\alpha = 0,2$	$(\lg E\gamma)^{-1}$		$\alpha = 0,2$	$(\lg E\gamma)^{-1}$
10 ³	545	545	545	545	545	545
6·10 ³	2.560	2.560	2.560	2.563	2.249	2.564
10 ⁴	4.483	4.483	4.483	4.173	4.182	4.497
6·10 ⁴	2.620	2.613	2.615	2.607	2.604	2.637
10 ⁵	4.225	4.203	4.208	4.226	4.218	4.255
6·10 ⁵	2.005	1.940	1.948	2.016	2.003	2.010
10 ⁶	2.939	2.808	2.821	2.955	2.929	2.937
6·10 ⁶	8.230	7.545	7.512	8.260	8.157	8.157
10 ⁷	1.018	9.258	9.177	1.021	1.007	1.006
6·10 ⁷	1.768	1.587	1.546	1.771	1.748	1.743
10 ⁸	1.989	1.783	1.729	1.992	1.965	1.958

La $R(E)$ è stata calcolata nelle due ipotesi, che lo spettro dei fotoni virtuali che accompagnano il μ siano dati rispettivamente dalla formula di Weizsächer-Williams e dalla formula di Kessler-Kessler.

I risultati sono mostrati in Tabella V nel caso in cui $Z^2/A = 5,11$; $Z/A = 0,494$; $\rho = 2,6$.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] C. CASTAGNOLI, A. DE MARCO, R. SCRIMAGLIO, «Atti Acc. Lincei», XXXVI, 4, 476 (1964); ibid., XXXVI, 5, 640 (1964). Nel seguito questi lavori saranno citati con I, II.
- [2] Per una bibliografia vedi ad esempio C. CASTAGNOLI, A. DE MARCO, A. LONGHETTO, P. PENENGO, «Nuovo Cim.», 35, 969 (1965).
- [3] T. KITAMURA, Comunicazione privata (1964).
- [4] C. CASTAGNOLI, A. DE MARCO, R. SCRIMAGLIO, «N. Cim.», 33, 722 (1964).
- [5] M. MANDO, L. RONCHI, «N. Cim.», 9, 517 (1952).
- [6] G. FIORITO, A. LONGHETTO, Rapp. Inter. 9 (INFN Torino) 1964.
- [7] S. MIYAKE, V. S. NARASHINAN, P. V. RAMANA-MURTHY, «N. Cim.», 32, 1505 (1964).
- [8] R. STERNHEIMER, «Phys. Rev.», 103, 511 (1956).
- [9] G. B. ZHADNOV, M. S. TRET'YAKOVA, V. N. TSYTOVICH, M. N. SHCHERBANOVA, «Soviet Phys. - J.E.P.T.», 17, 254 (1963).
- [10] J. L. ROZENTHAL, V. N. STRELT'SOV, «Soviet Phys. - J.E.P.T.», 8, 1007 (1959).
- [11] Y. EISENBERG et al., Comunicazione al Congresso di Dubna, 1964.
- [12] S. OZAKI, «Proc. Kyoto Conf.», 3, 330 (1961).
- [13] P. J. HAYMAN, N. S. PALMER, A. W. WOLFENDALE «Proc. Roy. Soc.», 275, A, 391 (1963).
- [14] A. W. WOLFENDALE, Saipur Conf. on Cosmic Rays.